

Reserva Matemática

Tema 1

Resumen

1. Operación financiera

Definición 1.1 *Entenderemos por operación financiera a cualquier intercambio de capitales financieros con distintos vencimientos.*

Ejemplo 1.2 *El pago de la prima un seguro.*

Ejemplo 1.3 *Una opción de compra sobre una acción.*

Ejemplo 1.4 *Un préstamo hipotecario.*

En cada operación financiera participan dos agentes, uno de ellos genera un flujo de capitales que denominaremos de *prestación* y un segundo que denominaremos de *contraprestación*.

Los flujos de capitales los representaremos con un vector

$$\mathbf{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n)$$

donde C_n representa el flujo de capital en el instante de tiempo t_n , asumiremos los mismos componentes para ambos agentes, ya que en caso de no recibir flujo en un instante de tiempo dado la correspondiente componente temporal, digamos C_k , esta será igual a 0, esto es $C_k = 0$.

Ejemplo 1.5 *Juan presta 1000 euros a Pepe, que se compromete a devolverlos en dos pagos mensuales de 500 euros. En este caso los flujos que se generan son*

Juan: $(0, 500, 500)$

Pepe: $(1000, 0, 0)$.

1.1. Valor inicial y valor final

Recordemos el concepto de valor inicial y final de un flujo de capitales. Asumamos un flujo de capitales

$$\mathbf{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n).$$

Denotaremos por $i_{k,k+1}$ el tipo de interés entre los periodos k y $k+1$ para k variando entre 0 y $n-1$.

Definición 1.6 Diremos que $(i_{0,1}, \dots, i_{n,n-1})$ es una estructura temporal de tipos de interés para un flujo de capitales $\mathbf{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n)$.

El tipo de interés entre 0 y k lo podemos definir mediante la expresión:

$$(1 + i_{0,k}) := (1 + i_{0,1})(1 + i_{1,2}) \dots (1 + i_{k-1,k}), \quad (1)$$

donde por motivos de notación escribiremos

$$i_{0,0} = i_{1,1} = \dots = i_{n,n} = 0.$$

Esto nos genera otra estructura de tipos:

$$(i_{0,1}, i_{0,2}, \dots, i_{0,n})$$

Se puede comprobar que empleando (1) es indiferente conocer $(i_{0,1}, \dots, i_{n,n-1})$ o $(i_{0,1}, i_{0,2}, \dots, i_{0,n})$.

Ejemplo 1.7 Juan presta 1000 euros a Pepe, que se compromete a devolverlos en dos pagos mensuales de 500 euros. En este caso los flujos que se generan son

$$\text{Juan: } (0, 500, 500)$$

$$\text{Pepe: } (1000, 0, 0).$$

Supongamos que los tipos en la operación son

$$i_{0,0} = 0, i_{0,1} = 0.0024 \text{ (0.24 \%)} i_{1,2} = 0.0016 \text{ (0.16 \%)}$$

lo que nos dice que el primer mes el interés será de un 0.24 % mensual y el segundo mes de un 0.16 % mensual. Entonces el interés de los dos meses

$$(1 + i_{0,2}) = (1 + i_{0,1})(1 + i_{1,2}) = 1.0023 \cdot 1.0016 = 1.0039$$

luego

$$i_{0,2} = 1.0039 - 1 = 0.0039 \text{ (0.39 \%)}.$$

Definición 1.8 El valor inicial de un flujo de capitales $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n)$ bajo una estructura temporal de tipos de interés $(i_{0,1}, i_{1,2}, \dots, i_{n,n-1})$ es

$$V_0 := \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{(1 + i_{0,k})} \quad (2)$$

Definición 1.9 El valor final de un flujo de capitales $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n)$ bajo una estructura temporal de tipos de interés $(i_{0,1}, i_{1,2}, \dots, i_{n,n-1})$ es

$$V_n := \sum_{k=0}^n C_k (1 + i_{0,k}) \quad (3)$$

Ejemplo 1.10 Juan presta 1000 euros a Pepe, que se compromete a devolverlos en dos pagos mensuales de 500 euros. En este caso los flujos que se generan son

Juan: $(0, 500, 500)$

Pepe: $(1000, 0, 0)$.

con una estructura de tipos de interés $(0.0016, 0.0024)$. Con estos datos el valor inicial de los flujos de Juan:

$$V_0 = 0 + \frac{500}{(1 + 0.0016)} + \frac{500}{(1 + 0.0016)(1 + 0.0024)} = 997.21$$

y el valor final

$$V_n = 0(1 + 0.0016)(1 + 0.0024) + 500(1 + 0.0024) + 500 = 1001.2.$$

Una pregunta natural es ¿cuál será el valor de los flujos, para una estructura de tipos dada $(i_{0,1}, i_{1,2}, \dots, i_{n,n-1})$, en cualquier instante de tiempo intermedio k donde $0 < k < n$?

La respuesta es simple, basta ordenar

$$\begin{aligned} &C_0, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots, C_n \\ &i_{0,1}, \dots, i_{k-1,k}, i_{k,k+1}, \dots, i_{n-1,n} \end{aligned}$$

los flujos $(C_0, \dots, C_k)$ generan un valor final con una estructura de tipos $(i_{0,1}, i_{1,2}, \dots, i_{k-1,k})$ igual a

$$V_{\text{final}} = \sum_{s=0}^k C_s (1 + i_{0,s}) = C_0(1 + i_{0,k}) + C_1(1 + i_{1,k}) + \dots + C_k.$$

y para $(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$ con una estructura de tipos $(i_{k,k+1}, \dots, i_{n-1,n})$ calculamos el valor inicial

$$V_{\text{inicial}} = \sum_{s=k}^n \frac{C_s}{(1+i_{k,s})} = C_k + \frac{C_{k+1}}{1+i_{k,k+1}} + \dots + \frac{C_n}{1+i_{k,n}}$$

Podemos introducir entonces

Definición 1.11 *El valor en k de un flujo de capitales $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n)$ bajo una estructura temporal de tipos de interés $(i_{0,1}, i_{1,2}, \dots, i_{n,n-1})$ es*

$$V_k = \sum_{s=0}^{k-1} C_s(1+i_{s,k}) + C_k + \sum_{s=k+1}^n \frac{C_s}{(1+i_{k,s})},$$

esto es,

$$V_k = C_0(1+i_{0,k}) + \dots + C_{k-1}(1+i_{k-1,k}) + C_k + \frac{C_{k+1}}{1+i_{k,k+1}} + \dots + \frac{C_n}{1+i_{k,n}}.$$

Ejemplo 1.12 *Juan presta 1000 euros a Pepe, que se compromete a devolverlos en dos pagos mensuales de 500 euros. En este caso los flujos que se generan son*

Juan: $(0, 500, 500)$

Pepe: $(1000, 0, 0)$.

con una estructura de tipos de interés $(0.0016, 0.0024)$. Entonces el valor en el primer mes de los flujos de Juan es

$$V_2 = 0(1+0.0016) + 500 + \frac{500}{(1+0.0024)} = 998.80.$$

Basta observar que lo importante en esta operativa es la estructura de tipos de interés $(i_{0,1}, i_{1,2}, \dots, i_{n,n-1})$. Construimos la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{(1+i_{0,1})} & \frac{1}{(1+i_{0,2})} & \dots & \frac{1}{(1+i_{0,n-1})} & \frac{1}{(1+i_{0,n})} \\ (1+i_{0,1}) & 1 & \frac{1}{(1+i_{1,2})} & \dots & \frac{1}{(1+i_{1,n-1})} & \frac{1}{(1+i_{1,n})} \\ (1+i_{0,2}) & (1+i_{1,2}) & 1 & \dots & \frac{1}{(1+i_{2,n-1})} & \frac{1}{(1+i_{2,n})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (1+i_{0,n-1}) & (1+i_{1,n-1}) & (1+i_{2,n-1}) & \dots & 1 & \frac{1}{(1+i_{n-1,n})} \\ (1+i_{0,n}) & (1+i_{1,n}) & (1+i_{2,n}) & \dots & (1+i_{n-1,n}) & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces el cálculo de los valores del flujo en cada instante de tiempo se puede calcular del modo siguiente:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{C}, \quad \text{esto es,} \quad \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{(1+i_{0,1})} & \frac{1}{(1+i_{0,2})} & \cdots & \frac{1}{(1+i_{0,n-1})} & \frac{1}{(1+i_{0,n})} \\ (1+i_{0,1}) & 1 & \frac{1}{(1+i_{1,2})} & \cdots & \frac{1}{(1+i_{1,n-1})} & \frac{1}{(1+i_{1,n})} \\ (1+i_{0,2}) & (1+i_{1,2}) & 1 & \cdots & \frac{1}{(1+i_{2,n-1})} & \frac{1}{(1+i_{2,n})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (1+i_{0,n-1}) & (1+i_{1,n-1}) & (1+i_{2,n-1}) & \cdots & 1 & \frac{1}{(1+i_{n-1,n})} \\ (1+i_{0,n}) & (1+i_{1,n}) & (1+i_{2,n}) & \cdots & (1+i_{n-1,n}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}$$

La primera observación importante es que la matriz A tiene rango uno, esto quiere decir que su determinante es cero, con lo que la matriz no es invertible, y además la primera fila genera las restantes.

2. Equivalencia de operaciones financieras

Sigamos con el ejemplo de la sección anterior donde Juan presta 1000 euros a Pepe, que se compromete a devolverlos en dos pagos mensuales de 500 euros. En este caso los flujos que se generan son

Juan: (0, 500, 500)

Pepe: (1000, 0, 0).

Ahora bien, Juan piensa con buen criterio, que si pusiese sus 1000 euros en la Cuenta “Pastón”, que paga un interés de un 10 % mensual, los flujos serían

Juan: (0, 0, 1210)

Cuenta Pastón: (1000, 0, 0).

Supongamos entonces que el tipo de interés mensual para todas las operaciones es del 10 %. Entonces la valoración de los flujos de capital (0, 500, 500) con

una estructura de tipos $(0.10, 0.10)$ nos proporciona los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{500}{1+0.1} + \frac{500}{(1+0.1)^2} = 867.77 \text{ euros} \\ V_1 &= 500 + \frac{500}{(1+0.1)} = 954.55 \text{ euros,} \\ V_2 &= 500(1+0.1) + 500 = 1050 \text{ euros.} \end{aligned}$$

Esto nos dice que si consideramos los flujos

$$\begin{aligned} \text{Juan: } &(0, 500, 500) \\ \text{Pepe: } &(867.77, 0, 0) \end{aligned}$$

entonces los valores de ambos flujos en cualquier instante temporal, con respecto a la estructura de tipos $(0.10, 0.10)$, coincide

$$\begin{aligned} V_0^{Juan} &= 867.77, V_1^{Juan} = 954.55, V_3^{Juan} = 1050 \\ V_0^{Pepe} &= 867.77, V_1^{Pepe} = 954.55, V_3^{Pepe} = 1050. \end{aligned}$$

Se puede comprobar facilmente que

$$\begin{aligned} \text{Juan: } &(0, 500, 500) \\ V_0^{Juan} &= \frac{500}{1+0.1} + \frac{500}{(1+0.1)^2} = 867.77 \\ V_1^{Juan} &= 500 + \frac{500}{(1+0.1)} = 954.55 \\ V_2^{Juan} &= 500(1+0.1) + 500 = 1050. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Pepe: } &(867.77, 0, 0) \\ V_0^{Pepe} &= 867.77 \\ V_1^{Pepe} &= 867.77(1+0.1) = 954.55 \\ V_2^{Pepe} &= 867.77(1+0.1)^2 = 1050. \end{aligned}$$

coinciden.

Criterio 2.1 (*Principio de Equivalencia Financiera*) *Dados dos flujos de capitales financieros*

$$\mathbf{C}^{Prestación} \text{ y } \mathbf{C}^{Contraprestación}$$

se dicen equivalentes si existe una estructura de tipos de forma que

$$V_k^{Prestación} = V_k^{Contraprestación}, \quad (4)$$

para todos los instantes de tiempo k .

La idea es bastante simple si tenemos en cuenta la matriz A que se construye a partir de la estructura de tipos. Recordemos que

$$\mathbf{V}^{Prestación} = A\mathbf{C}^{Prestación}$$

y del mismo modo

$$\mathbf{V}^{Contraprestación} = A\mathbf{C}^{Contraprestación}.$$

Esta claro, que el principio de equivalencia financiera $\mathbf{V}^{Prestación} = \mathbf{V}^{Contraprestación}$ implica que

$$A\mathbf{C}^{Prestación} = A\mathbf{C}^{Contraprestación}. \quad (5)$$

Luego el principio de equivalencia financiera se puede representar matricialmente empleando la fórmula:

$$A(\mathbf{C}^{Prestación} - \mathbf{C}^{Contraprestación}) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

2.0.1. Ejemplo

Consideremos que durante 6 meses los flujos de capital de una prestación de capital son

$$\text{Prestación:}(0, 0, 500, 20, 20, 400)$$

donde el tipo de interés de mercado es del 3,5 % anual. Como tenemos flujos mensuales, se tiene que cumplir:

$$(1 + i_{anual}) = (1 + i_{mensual})^{12} \Rightarrow i_{anual} = (1 + i_{mensual})^{1/12} - 1. \quad (7)$$

Luego

$$i_{mensual} = (1.035)^{1/12} - 1 = e^{\frac{1}{12} \ln(1.035)} - 1 \approx 0.0028709.$$

Entonces considerando la estructura de tipos constante

$$(0.0029, 0.0029, 0.0029, 0.0029, 0.0029),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
V_0^{\text{Prestación}} &= \frac{500}{(1 + 0.0029)^2} + \frac{20}{(1 + 0.0029)^3} + \frac{20}{(1 + 0.0029)^4} + \frac{400}{(1 + 0.0029)^5} \\
V_1^{\text{Prestación}} &= \frac{500}{(1 + 0.0029)^1} + \frac{20}{(1 + 0.0029)^2} + \frac{20}{(1 + 0.0029)^3} + \frac{400}{(1 + 0.0029)^4} \\
V_2^{\text{Prestación}} &= 500 + \frac{20}{(1 + 0.0029)^1} + \frac{20}{(1 + 0.0029)^2} + \frac{400}{(1 + 0.0029)^3} \\
V_3^{\text{Prestación}} &= 500(1 + 0.0029) + 20 + \frac{20}{(1 + 0.0029)} + \frac{400}{(1 + 0.0029)^2} \\
V_4^{\text{Prestación}} &= 500(1 + 0.0029)^2 + 20(1 + 0.0029) + 20 + \frac{400}{(1 + 0.0029)} \\
V_5^{\text{Prestación}} &= 500(1 + 0.0029)^3 + 20(1 + 0.0029)^2 + 20(1 + 0.0029) + 400.
\end{aligned}$$

Esto es:

$$(930.96, 933.66, 936.37, 939.08, 941.81, 944.54).$$

El principio de equivalencia financiera actua entonces del modo siguiente. Si los capitales de la contraprestación son

$$\text{Contraprestación: } (C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5),$$

se tiene que cumplir

$$\begin{aligned}
V_0^{\text{Contraprestación}} &= \sum_{i=0}^5 \frac{C_j}{(1 + 0.0029)^i} = 930.96 \\
V_1^{\text{Contraprestación}} &= \sum_{i=0}^5 \frac{C_j}{(1 + 0.0029)^{i-1}} = 933.66 \\
V_2^{\text{Contraprestación}} &= \sum_{i=0}^5 \frac{C_j}{(1 + 0.0029)^{i-2}} = 936.37 \\
V_3^{\text{Contraprestación}} &= \sum_{i=0}^5 \frac{C_j}{(1 + 0.0029)^{i-3}} = 939.08 \\
V_4^{\text{Contraprestación}} &= \sum_{i=0}^5 \frac{C_j}{(1 + 0.0029)^{i-4}} = 941.81 \\
V_5^{\text{Contraprestación}} &= \sum_{i=0}^5 \frac{C_j}{(1 + 0.0029)^{i-5}} = 944.54.
\end{aligned}$$

En particular obtenemos:

$$\begin{aligned}
C_0 + 0.99711C_1 + 0.99423C_2 + 0.99135C_3 + 0.98848C_4 + 0.98563C_5 &= 930.96 \\
1.00290C_0 + C_1 + 0.99711C_2 + 0.99423C_3 + 0.99135C_4 + 0.98848C_5 &= 933.66 \\
1.00581C_0 + 1.00290C_1 + C_2 + 0.99711C_3 + 0.99423C_4 + 0.99135C_5 &= 936.37 \\
1.00873C_0 + 1.00581C_1 + 1.00290C_2 + C_3 + 0.99711C_4 + .99423C_5 &= 939.08 \\
1.01165C_0 + 1.00873C_1 + 1.00581C_2 + 1.00290C_3 + C_4 + 0.99711C_5 &= 941.81 \\
1.01458C_0 + 1.01165C_1 + 1.00873C_2 + 1.00581C_3 + 1.00290C_4 + C_5 &= 944.54,
\end{aligned}$$

un sistema lineal de 5 ecuaciones con cinco incógnitas. Como cada ecuación se genera a partir de la primera

$$C_0 + 0.99711C_1 + 0.99423C_2 + 0.99135C_3 + 0.98848C_4 + 0.98563C_5 = 930.96$$

multiplicada por $(1+0.0029)$ obtenemos que este sistema lineal tiene infinitas soluciones. En particular, despejando C_0 de la primera ecuación, se obtiene que

$$C_0 = 930.96 - 0.99711C_1 - 0.99423C_2 - 0.99135C_3 - 0.98848C_4 - 0.98563C_5.$$

los capitales de la contraprestación tienen cinco grados de libertad. Por ejemplo, podemos considerar

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0,$$

entonces se ha de cumplir

$$C_0 = 930.96.$$

Para este particular ejemplo, obtenemos que los flujos de capital

$$\text{Prestación: } (0, 0, 500, 20, 20, 400)$$

$$\text{Contaprestación: } (930.96, 0, 0, 0, 0, 0)$$

con la estructura de tipos

$$(0.0029, 0.0029, 0.0029, 0.0029, 0.0029),$$

son equivalentes.

La interpretación viene a ser la siguiente: Es equivalente recibir 930.96 euros hoy a pagar a partir del tercer mes las cantidades de 500, 20, 20 y 400 euros respectivamente. Siempre asumiendo que la estructura de tipos es

$$(0.0029, 0.0029, 0.0029, 0.0029, 0.0029).$$

3. Reserva matemática o saldo financiero

Definición 3.1 *Recibe el nombre de saldo financiero o reserva matemática en un instante de tiempo t , a la diferencia entre el valor en t de los capitales de las prestaciones, con vencimientos anteriores o iguales a t , y las de los capitales de las contraprestaciones, con sus correspondientes vencimientos anteriores o iguales a t .*

Consideremos otra vez los flujos

Juan: $(0, 500, 500)$

Pepe: $(867.77, 0, 0)$

Entonces

$$R_0 = 0 - 867.77 = -867.77$$

$$R_1 = (0(1 + 0.1) + 500) - (867.77(1 + 0.1) + 0) = -454.55$$

$$R_3 = (0(1 + 0.1)^2 + 500(1 + 0.1) + 500) - (867.77(1 + 0.1)^2 + 0(1 + 0.1) + 0) = 0.$$

Se suele escribir los saldos financieros

$$S_0 = 0, \quad S'_0 = 867.77$$

$$S_1 = 500, \quad S'_1 = 867.77(1 + 0.1) = 954.55$$

$$S_3 = 500(1 + 0.1) + 500 = 1050, \quad S'_3 = 867.77(1 + 0.1)^2 = 1050.$$

Entonces:

- $R_i = S_i - S'_i > 0$ entonces la reserva es a favor de la prestación, es decir quien hizo la entrega del primer capital está adoptando una posición acreedora frente a la contraprestación que adopta una posición deudora.
- $R_i = S_i - S'_i < 0$ entonces la reserva es a favor de la contraprestación, en este caso la parte que recibió el primer capital adopta una posición acreedora frente a la prestación.

La reserva matemática no es mas que la valoración en un instante de tiempo dado de la diferencia entre las aportaciones realizadas hasta esa fecha por cada una de las partes implicadas en la operación.

Si quisieramos formalizar esta operativa, consideremos

Prestación: $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n)$

Contaprestación: $(C'_0, C'_1, \dots, C'_{n-1}, C'_n)$

Esta claro que entre los capitales C_k, C'_k y C_{k+1}, C'_{k+1} podemos asumir un tipo de interés $i_{k,k+1}$. Recordemos que el tipo de interés entre 0 y k lo podemos definir mediante la expresión:

$$(1 + i_{0,k}) := (1 + i_{0,1})(1 + i_{1,2}) \dots (1 + i_{k-1,k}),$$

donde por motivos de notación escribimos

$$i_{0,0} = i_{1,1} = \dots = i_{n,n} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_0 &= C_0, \\ S'_0 &= C'_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= C_0(1 + i_{0,1}) + C_1, \\ S'_1 &= C'_0(1 + i_{0,1}) + C'_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= C_0(1 + i_{0,2}) + C_1(1 + i_{1,2}) + C_2, \\ S'_2 &= C'_0(1 + i_{0,2}) + C'_1(1 + i_{1,2}) + C'_2, \end{aligned}$$

en general

$$S_p = \sum_{k=0}^p C_k(1 + i_{k,p}) \tag{8}$$

$$S'_p = \sum_{k=0}^p C'_k(1 + i_{k,p}), \tag{9}$$

para $1 \leq p \leq n$. Entonces la reserva matemática, empleando el llamado *método retrospectivo*, se puede expresar como:

$$R_p := S_p - S'_p = \sum_{k=0}^p (C_k - C'_k)(1 + i_{k,p})$$

3.0.2. Ejemplo

Consideremos

Prestación: (0, 0, 500, 20, 20, 400)

Contaprestación: (930.96, 0, 0, 0, 0, 0)

donde $i_{k,k+1} = i = 0.0029$. Calcular la reserva matemática en todos los instantes de tiempo.

En primer lugar restamos los capitales

$$(0, 0, 500, 20, 20, 400) - (930.96, 0, 0, 0, 0, 0) = (-930.96, 0, 500, 20, 20, 400).$$

para generar las diferencias $(C_k - C'_k)$ Entonces,

$$R_0 = -930.96$$

$$R_1 = -930.96(1 + 0.0029) + 0$$

$$R_2 = -930.96(1 + 0.0029)^2 + 500$$

$$R_3 = -930.96(1 + 0.0029)^3 + 500(1 + 0.0029) + 20$$

$$R_4 = -930.96(1 + 0.0029)^4 + 500(1 + 0.0029)^2 + 20(1 + 0.0029) + 20$$

$$R_5 = -930.96(1 + 0.0029)^5 + 500(1 + 0.0029)^3 + 20(1 + 0.0029)^2 + 20(1 + 0.0029) + 400.$$

Esto se puede representar matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1.0029) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1.0029)^2 & (1.0029) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1.0029)^3 & (1.0029)^2 & (1.0029) & 1 & 0 & 0 \\ (1.0029)^4 & (1.0029)^3 & (1.0029)^2 & (1.0029) & 1 & 0 \\ (1.0029)^5 & (1.0029)^4 & (1.0029)^3 & (1.0029)^2 & (1.0029) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -930.96 \\ 0 \\ 500 \\ 20 \\ 20 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Obteniendo

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.3096e + 02 \\ -9.3366e + 02 \\ -4.3637e + 02 \\ -4.1763e + 02 \\ -3.9884e + 02 \\ -6.4572e - 04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -930.96 \\ -933.66 \\ -436.37 \\ -417.63 \\ -398.84 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$

Veamos algunas propiedades

$$S_p = \sum_{k=0}^p C_k(1 + i_{k,p}) = \sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p}) + C_p(1 + i_{p,p}) = \sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p}) + C_p,$$

donde no hay que confundir

$$\sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p}) \text{ con } S_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p-1}).$$

La pregunta natural es: ¿qué relación existe entre $(1 + i_{k,p})$ y $(1 + i_{k,p-1})$ para poder relacionar S_p con S_{p-1} ? Recordemos que

$$(1 + i_{k,p}) = (1 + i_{k,k+1})(1 + i_{k+1,k+2}) \cdots (1 + i_{p-2,p-1})(1 + i_{p-1,p})$$

y

$$(1 + i_{k,p-1}) = (1 + i_{k,k+1})(1 + i_{k+1,k+2}) \cdots (1 + i_{p-2,p-1}),$$

En consecuencia

$$(1 + i_{k,p}) = (1 + i_{k,p-1})(1 + i_{p-1,p}). \quad (10)$$

Podemos entonces escribir,

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p}) + C_p \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p-1})(1 + i_{p-1,p}) + C_p, \text{ usamos (10)} \\ &= (1 + i_{p-1,p}) \sum_{k=0}^{p-1} C_k(1 + i_{k,p-1}) + C_p \\ &= (1 + i_{p-1,p}) S_{p-1} + C_p. \end{aligned}$$

En resumen:

Lema 3.2 *Se cumple para cada $1 \leq p \leq n$ la siguiente fórmula*

$$S_p = (1 + i_{p-1,p}) S_{p-1} + C_p. \quad (11)$$

Si procedemos inductivamente hacia atrás, obtenemos a partir de expresar

$$S_{p-1} = (1 + i_{p-2,p-1}) S_{p-2} + C_{p-1},$$

y sustituir en (11),

$$\begin{aligned} S_p &= (1 + i_{p-1,p}) S_{p-1} + C_p \\ &= (1 + i_{p-1,p}) ((1 + i_{p-2,p-1}) S_{p-2} + C_{p-1}) + C_p \\ &= (1 + i_{p-2,p-1})(1 + i_{p-1,p}) S_{p-2} + (1 + i_{p-1,p}) C_{p-1} + C_p \\ &= (1 + i_{p-2,p}) S_{p-2} + (1 + i_{p-1,p}) C_{p-1} + C_p \\ &\vdots \\ &= (1 + i_{p-k,p}) S_{p-k} + (1 + i_{p-k+1,p}) C_{p-k+1} + \cdots + (1 + i_{p-1,p}) C_{p-1} + C_p. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que se cumple:

$$S_p = (1 + i_{p-k,p})S_{p-k} + \sum_{s=p-k+1}^p (1 + i_{s,p})C_s. \quad (12)$$

para $1 \leq p \leq n$ y $0 \leq k \leq p$.

Proposición 3.3 (Método recurrente) *Se cumple*

$$R_p = (1 + i_{p-k,p})R_{p-k} + \sum_{s=p-k+1}^p (1 + i_{s,p})(C_s - C'_s) \quad (13)$$

para $1 \leq p \leq n$ y $0 \leq k \leq p$.

Demostración. Basta considerar

$$S_p = (1 + i_{p-k,p})S_{p-k} + \sum_{s=p-k+1}^p (1 + i_{s,p})C_s$$

y

$$S'_p = (1 + i_{p-k,p})S'_{p-k} + \sum_{s=p-k+1}^p (1 + i_{s,p})C'_s$$

y calcular $R_p = S_p - S'_p$. ■

Recordemos ahora la definición de V_p

$$V_p = \sum_{s=0}^{p-1} C_s(1 + i_{s,p}) + C_p + \sum_{s=p+1}^n \frac{C_s}{(1 + i_{p,s})},$$

e intentemos relacionarlo con

$$S_p = \sum_{s=0}^{p-1} C_s(1 + i_{s,p}) + C_p.$$

De forma clara podemos escribir

$$V_p = S_p + \sum_{s=p+1}^n \frac{C_s}{(1 + i_{p,s})}. \quad (14)$$

El principio de equivalencia financiera nos dice que $V_p = V'_p$, entonces se cumple la igualdad siguiente:

$$S_p + \sum_{s=p+1}^n \frac{C_s}{(1 + i_{p,s})} = S'_p + \sum_{s=p+1}^n \frac{C'_s}{(1 + i_{p,s})} \quad (15)$$

Podemos enunciar entonces el resultado siguiente

Proposición 3.4 (Método prospectivo) *Para cada $0 \leq p \leq n$ se cumple*

$$R_p = S_p - S'_p = \sum_{s=p+1}^n \frac{C'_s - C_s}{(1 + i_{p,s})}. \quad (16)$$

4. Observaciones prácticas

Veamos un enunciado típico de los problemas que aparecen en este tema y como proceder de manera sencilla.

Problema 4.1 *Consideremos una operación financiera consistente en el intercambio de los siguientes conjuntos de capitales financieros:*

Prestación $\{(1.000, 2011), (5.000, 2013), (3.000, 2015)\}$

Contraprestación $\{(4.000, 2012), (C, 2016)\}$

Basándose para su valor en un tipo de interés del 5 % anual bajo capitalización compuesta calcula el valor de C .

Para emplear la formulación vista anteriormente está claro que el plazo temporal abarca de 2011 a 2016, con lo que esto nos genera vectores que podemos escribir con 6 posiciones o entradas: (2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016) La estructura de tipos es entonces

$$(0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05)$$

con cinco entradas. Ahora se escribimos

$$\text{Prestación } (1000, 0, 5000, 0, 3000, 0)$$

$$\text{Contraprestación } (0, 4000, 0, 0, 0, C)$$

Esta claro que empleando el principio de equivalencia financiera se ha de cumplir por ejemplo,

$$V'_6 = C + 4000(1 + 0.05)^4 = V_6$$

o bien tambien podríamos emplear

$$V'_2 = 4000 + \frac{C}{(1 + 0.05)^4} = V_2.$$

con lo que tenemos dos opciones para obtener el valor de C . Por un lado debemos usar que

$$V_6 = 1000(1 + 0.05)^5 + 5000(1 + 0.05)^3 + 3000(1 + 0.05),$$

y por otro que el valor de

$$V_2 = 1000(1 + 0.05) + \frac{5000}{(1 + 0.05)} + \frac{3000}{(1 + 0.05)^3}.$$