

Fundamentos Matemáticos de la Arquitectura II

Problemas

Semanas 2 Noviembre - 13 Noviembre

1. Comprobar que el potencial newtoniano $V = -GmM/r$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

en todas partes excepto en el origen.

2. Calcula los puntos estacionarios o críticos de la función

$$z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$

3. Un ingeniero quiere construir un ferrocarril que suba a la montaña en forma de paraboloide elíptico

$$z = c - ax^2 - by^2$$

donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas este-oeste y norte-sur en el mapa y z es la altura con respecto al nivel del mar (todas medidas en metros), ¿En el punto $(1, 1)$ en qué dirección crece la altitud más rápidamente? ¿en qué direcciones podría tenderse la vía de forma que subiera con una pendiente de un 3 %, es decir un ángulo cuya tangente sea igual a 0,03? Esbozar un esquema de la situación indicando las dos posibles direcciones con una pendiente del 3 % en el punto $(1, 1)$.

4. El potencial electrostático V generado por dos filamentos infinitos y paralelos con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$ es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

donde $r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2$ y $r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2$, suponemos que los filamentos están en la dirección de z y atraviesan el plano xy en $(-x_0, 0)$ y $(x_0, 0)$. Calcula $\nabla V(x, y)$.