

Fundamentos Matemáticos de la Arquitectura

II

Prueba de Cálculo Integral

Nombre y Apellidos:

1. Calcula

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Solución: Si la escribimos

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$$

y tomamos $u = e^x$ entonces $du = e^x dx$, en consecuencia

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln(1+u)]_0^1 = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e^1) - \ln(1+e^0) = \ln(1+e) - \ln 2.$$

2. Calcula

$$\int_{-2}^1 (2x+4)e^{(2x+4)} dx$$

Solución: Escribimos $u = 2x+4$ entonces $du = 2dx$, sustituimos y resolvemos en primer lugar la integral indefinida

$$\begin{aligned} \int u e^u \frac{du}{2} &= \frac{1}{2} \int u e^u du \\ &= \text{integramos por partes tomando } dv = e^u du \text{ y } w = u \\ \int w dv &= wv - \int v dw \\ &= \frac{1}{2} (u e^u - \int e^u 1 du) \\ &= \frac{1}{2} (u e^u - e^u) \\ &= \frac{1}{2} (u - 1) e^u \\ &= \frac{1}{2} (2x + 4 - 1) e^{2x+4} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_{-2}^1 (2x+4)e^{(2x+4)} dx = \frac{1}{2} [(2x+3)e^{2x+4}]_{-2}^1 = \frac{1}{2} (5e^6 + 1).$$

3. Calcula la integral $\int_0^\pi f(x) dx$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ (x \sin x) + 1 & \text{si } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Solución: En primer lugar como la función f está definida a trozos:

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(x) dx.$$

La primera de ellas

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}.$$

La segunda

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^\pi f(x) dx &= \int_{\pi/2}^\pi ((x \sin x) + 1) dx \\ &= \int_{\pi/2}^\pi x \sin x dx + \int_{\pi/2}^\pi 1 dx \\ &= \int_{\pi/2}^\pi x \sin x dx + [x]_{\pi/2}^\pi \\ &= \int_{\pi/2}^\pi x \sin x dx + (\pi - \pi/2) \\ &= \int_{\pi/2}^\pi x \sin x dx + \pi/2. \end{aligned}$$

Nos falta resolver por partes

$$\int x \sin x = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x.$$

Finalmente

$$\int_{\pi/2}^\pi x \sin x dx = [-x \cos x + \sin x]_{\pi/2}^\pi = \pi - 1,$$

y

$$\int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi^2}{8} + 2\pi - 1.$$