

# Dinámica

Antonio Falcó, Ignasi Rosell

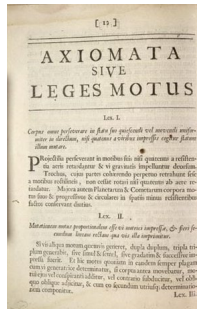
Tema 2

- 1 Leyes del movimiento
- 2 Conservación del momento
- 3 El centro de masas y su movimiento
  - Descripción física del salto vertical

# Leyes del movimiento

## Primera ley: Ley de la inercia

Un cuerpo libre se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo respecto a un sistema de referencia inercial.



Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

# Leyes del movimiento

## Segunda ley

Un objeto acelerará en la dirección de la fuerza resultante. La magnitud de la aceleración será igual a la fuerza resultante dividida por la masa del objeto.

$$\mathbf{F}(t) = m \mathbf{a}(t),$$

Si el objeto está sujeto a la acción de diferentes fuerzas, entonces

$$\mathbf{F}_1(t) + \mathbf{F}_2(t) + \cdots + \mathbf{F}_n(t) = \mathbf{F}_{\text{neta}}(t) = m \mathbf{a}(t).$$

La segunda ley, también permite relacionar la fuerza neta que actúa sobre el objeto con el momento  $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)$ , del modo siguiente:

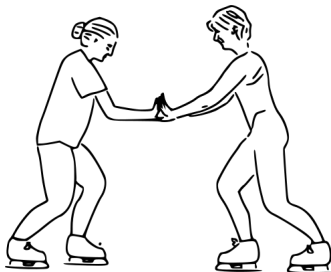
$$\mathbf{F}_{\text{neta}}(t) = m \mathbf{a}(t) = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}.$$

# Leyes del movimiento

## Tercera ley

Cualquier acción ejercida sobre un objeto, tiene que ser igual a su reacción opuesta

$$\mathbf{F}_{1,2}(t) = -\mathbf{F}_{2,1}(t).$$



## observación

*En todos los ejemplos que siguen, supondremos que las fuerzas se han medido a un instante de tiempo dado  $t_0$ , de forma que podemos considerar*

$$\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{a}$$

*la aceleración como una constante y en consecuencia*

- 1  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$
- 2  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{\text{neta}} = m \mathbf{a}$
- 3  $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$ .

# Ejemplo 1



Las fuerzas empleadas por los ligamentos y tendones sobre el codo en el instante de lanzar la bola se midieron en las direcciones media  $M$ , anterior  $A$  y compresión  $C$ . Los vectores unitarios con respecto a la referencia canónica en cada una de las direcciones son

$$\mathbf{e}_M = 0.79\mathbf{i} + 0.17\mathbf{j} + 0.58\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_A = 0.21\mathbf{i} + 0.98\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_C = -0.58\mathbf{i} - 0.12\mathbf{j} - 0.81\mathbf{k}$$

Las magnitudes obtenidas fueron

$$F_M = 428 \text{ N}, F_A = 101 \text{ N}, \text{ y } F_C = 253 \text{ N}.$$

Recordar que  $N = \text{kg} \times \text{m/s}^2$ . Empleando estos datos se pide calcular la fuerza resultante sobre el codo.

## Solución

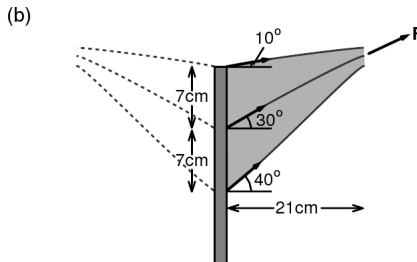
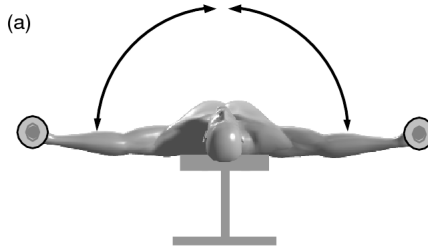
La fuerza neta es:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = F_M \mathbf{e}_M + F_A \mathbf{e}_A + F_C \mathbf{e}_C,$$

esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{net}} &= 428(0.79\mathbf{i} + 0.17\mathbf{j} + 0.58\mathbf{k}) \\ &\quad + 101(0.21\mathbf{i} + 0.98\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ &\quad + 253(-0.58\mathbf{i} - 0.12\mathbf{j} - 0.81\mathbf{k}) \\ &= 218.1\mathbf{i} - 56.6\mathbf{j} + 47.6\mathbf{k} \\ &= 225.3(0.94\mathbf{i} - 0.25\mathbf{j} + 0.21\mathbf{k})\end{aligned}$$

## Ejemplo 2



Supongamos que el pectoral se puede representar como un grupo de tres tipos diferentes de fibras musculares que conectan el esternón con el húmero. Determinar la fuerza resultante ejercida por el pectoral sobre el húmero en el instante de tiempo en el que se dan las condiciones y fuerzas expuestas en la figura anterior. Tal como se muestra en la anterior figura el musculo actua en un plano y la magnitud de la fuerza ejercida es de  $75\text{ N}$ .

En este ejemplo asumimos que todas las fibras de los pectorales son activadas por el sistema nervioso central. Además de que los pectorales son capaces de ejercer fuerzas sobre el húmero en un amplio rango de direcciones.

## Solución

Las tres fuerzas actuan sobre cada una de las siguientes direcciones unitarias:

$$\mathbf{e}_u = \cos 10^\circ \mathbf{i} + \sin 10^\circ \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

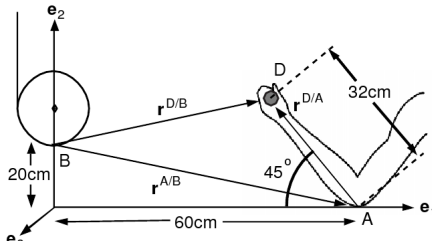
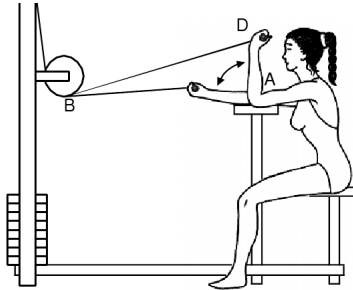
$$\mathbf{e}_m = \cos 30^\circ \mathbf{i} + \sin 30^\circ \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_l = \cos 40^\circ \mathbf{i} + \sin 40^\circ \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{neta}} &= 75\mathbf{e}_u + 75\mathbf{e}_m + 75\mathbf{e}_l \\ &= 75(\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ)\mathbf{i} \\ &\quad + 75(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.\end{aligned}$$

## Ejemplo 3



En la gráfica anterior la señorita efectúa un ejercicio con un peso de  $10\text{ kg}$ . Determinar la fuerza ejercida sobre la barra que tiene en su mano en el instante de tiempo en el que conocemos que el impulso ejercido sobre el peso tiene una aceleración vertical de  $3\text{ m/s}^2$ .

## Solución

La fuerza resultante ejercida sobre el peso es de

$$0\mathbf{i} + (F_u - 10 \times 9.81)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + (10 \times 3)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Luego  $F_u - 98.1 = 30$  En consecuencia la fuerza se subida del peso es

$$0\mathbf{i} + 128.1\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Rightarrow \|0\mathbf{i} + 128.1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\| = F_u = 128.1 \text{ N.}$$

Por otro lado  $\mathbf{r}^{A/B} = 0.60\mathbf{i} - 0.20\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ . Del mismo modo

$$\mathbf{r}^{D/A} = -0.32 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 0.32 \sin 45^\circ \mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{D/B} &= \mathbf{r}^{A/B} + \mathbf{r}^{D/A} \\ &= (0.60 - 0.32 \cos 45^\circ)\mathbf{i} + (0.32 \sin 45^\circ - 0.20)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.\end{aligned}$$

## Solución (continuación)

Conocemos que

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$

Entonces la dirección de la fuerza ejercida viene determinada por:

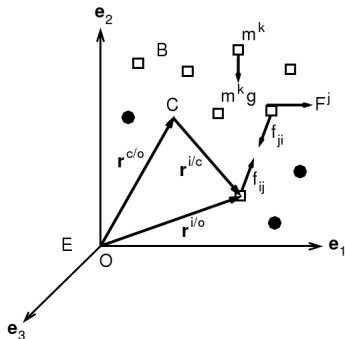
$$\mathbf{r}^{D/B} = 0.37\mathbf{i} + 0.03\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{r}^{D/B}\| = 0.3721$$

un vector unitario en la misma es

$$\mathbf{e}^{D/B} = 0.99\mathbf{i} + 0.08\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Como el módulo en esa dirección es  $F_u$  obtenemos que

$$\mathbf{F} = 128.1(0.99\mathbf{i} + 0.08\mathbf{j} + 0\mathbf{k}).$$



Consideremos un sistema de partículas

$\mathcal{B} = \{\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)\}$ ,  $\mathbf{r}_i(t)$  es la posición de la partícula  $p_i$  en  $t$ ,

marcadas con  $\square$  y un sistema de partículas externo marcadas con  $\bullet$ .

- ❶ Las fuerzas externas que actúan sobre  $\mathbf{r}_i$  las denotamos por  $\mathbf{F}_{i,i}(t)$ .
- ❷ Las fuerzas que ejerce  $p_i$  sobre  $p_j$  en  $t$  la denotamos por  $\mathbf{F}_{i,j}(t)$  siendo  $i \neq j$ .
- ❸ La segunda ley de Newton nos dice que para la partícula  $p_i$  se cumple

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j}(t) = m_i \mathbf{a}_i(t).$$

para cada instante de tiempo  $t$ .

- ❹ La tercera ley de Newton, nos dice  $\mathbf{F}_{i,j}(t) = -\mathbf{F}_{j,i}(t)$  para  $i \neq j$ .
- ❺ Sumando las fuerzas para todas las partículas del sistema  $\mathcal{B}$  tenemos:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{i,j}(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,i}(t)}_{\text{fuerzas externas}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i(t)$$

**La suma de las fuerzas internas es igual a la suma de las fuerzas externas.**

## Definición

*El momento lineal  $\mathbf{L}(t)$  de un sistema de partículas  $\mathcal{B}$  se define como*

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i(t)$$

## Ecuación de conservación del momento lineal

El ratio de cambio del momento lineal de un sistema de partículas es igual a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,i}(t) = \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt}.$$

## Definición

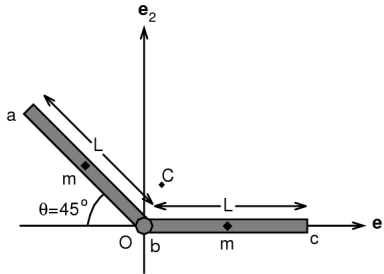
Consideremos un cuerpo  $\mathcal{B} = \{\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)\}$ , formado por  $n$ -partículas materiales. El **centro de masas** de  $\mathcal{B}$ , en el instante de tiempo  $t$ , se define a partir de su posición calculada como

$$\mathbf{r}^c(t) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i(t)}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Entonces la velocidad y aceleración del centro de masas es:

$$\mathbf{v}^c(t) = \frac{d\mathbf{r}^c(t)}{dt} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}^c(t) = \frac{d\mathbf{v}^c(t)}{dt}$$

## Ejemplo



Determinar el centro de masas de este objeto, asumiendo que para cada barra el centro de masas ocupa el punto medio de la misma con una masa igual a  $m$ .

## Solución

Las posición del centro de masas de la barra  $ab$  viene determinado por

$$\mathbf{r}_{ab} = -(L/2) \cos 45^\circ \mathbf{i} + (L/2) \sin 45^\circ \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

y el de  $bc$  por

$$\mathbf{r}_{bc} = (L/2) \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

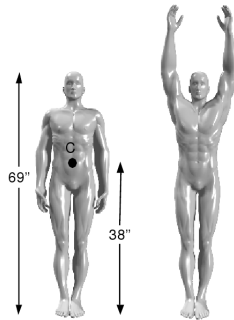
Entonces

$$\mathbf{r}^c = \frac{m\mathbf{r}_{ab} + m\mathbf{r}_{bc}}{2m} = \frac{m(\mathbf{r}_{ab} + \mathbf{r}_{bc})}{2m} = \frac{\mathbf{r}_{ab} + \mathbf{r}_{bc}}{2},$$

es decir

$$\mathbf{r}^c = 0.07L \mathbf{i} + 0.18L \mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

## Ejemplo



Un atleta que pesa 163 libras y tiene una altura de 69 pulgadas tiene situado su centro de masas a 38 pulgadas de altura. Determinar el cambio de en la elevación de su centro de masas al elevar las manos  $180^\circ$  sobre su cabeza. Sus brazos pesas 7 libras cada uno y sus manos se desplazan hacia arriba 25 pulgadas.

## Solución

Denotemos por  $m = 7$  lb la masa de cada brazo y por  $M$  la masa del resto del cuerpo. El centro de masas de cuerpo completo de masa  $2m + M = 163$  lb es

$$\mathbf{r}_{2m+M}(0) = 0\mathbf{i} + 38\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

por otro lado, los de cada brazo  $l$  o  $r$  y el resto del cuerpo sin brazos  $M$  seran:

$$\mathbf{r}_M(0) = 0\mathbf{i} + d\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_l(0) = x_0\mathbf{i} + h\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{r}_r(0) = -x_0\mathbf{i} + h\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

siendo  $x$  la distancia entre el origen y el centro de masas de cada una de las manos.

## Solución (continuación)

Se tiene que cumplir

$$\mathbf{r}_{2m+M}(0) = \frac{m\mathbf{r}_l(0) + m\mathbf{r}_r(0) + M\mathbf{r}_M(0)}{2m + M},$$

esto es

$$0\mathbf{i} + \underbrace{38\mathbf{j}} + 0\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + \underbrace{\frac{2mh + Md}{2m + M}\mathbf{j}} + 0\mathbf{k}$$

Para  $t = 0$  tenemos:

$$38(2m + M) = 2mh + Md \quad (1)$$

## Solución (continuación)

Si el centro de masas se desplaza una altura  $y$  en  $t = t_{up}$  entonces

$$\mathbf{r}_{2m+M}(t_{up}) = 0\mathbf{i} + (38 + y)\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

por otro lado, los de cada brazo  $l$  o  $r$  y el resto del cuerpo sin brazos  $M$  seran:

$$\mathbf{r}_M(t_{up}) = 0\mathbf{i} + d\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_l(t_{up}) = x_{up}\mathbf{i} + (h + 25)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{r}_r(t_{up}) = -x_{up}\mathbf{i} + (h + 25)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

## Solución (continuación)

Se tiene que cumplir

$$\mathbf{r}_{2m+M}(t_{up}) = \frac{m\mathbf{r}_l(t_{up}) + m\mathbf{r}_r(t_{up}) + M\mathbf{r}_M(t_{up})}{2m + M},$$

esto es

$$0\mathbf{i} + \underbrace{(38 + y)}_{\text{cm}}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + \underbrace{\frac{2m(h + 25) + Md}{2m + M}}_{\text{cm}}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Para  $t = t_{up}$  tenemos:

$$(38 + y)(2m + M) = 2m(h + 25) + Md \quad (2)$$

$$\text{empleando (1): } (38 + y)(2m + M) = 50m + \underbrace{2mh + Md}_{38(2m+M)}$$

### Solución (continuación)

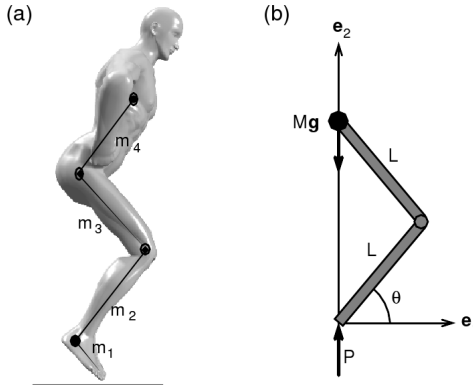
$$(38 + y)(2m + M) = 50m + \overbrace{2mh + Md}^{38(2m+M)}$$

Despejando

$$38(2m + M) + y(2m + M) = 50m + 38(2m + M)$$

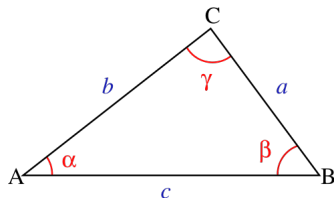
eliminando  $38(2m + M)$  obtenemos

$$y(2m + M) = 50m \Rightarrow y = \frac{50m}{2m + M} = \frac{50 \cdot 7}{163} = 2.15 \text{ pulgadas.}$$



Las dos barras se suponen conectadas a un sistema de músculo-tendón que hace que el ángulo entre ambas varíe.

# Trigonometría



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} : \text{ Si } a = b \Rightarrow \alpha = \beta.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \beta.$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \text{ y } \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

## Punto de masas de la articulación

Tenemos

$$\mathbf{r}_{bc} = L \cos \theta \mathbf{i} + L \sin \theta \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \text{ y}$$

Como

$$\underbrace{\mathbf{r}}_{0\mathbf{i}+h\mathbf{j}+0\mathbf{k}} + \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_{bc}$$

entonces

$$\mathbf{r}_{ab} = L \cos \theta \mathbf{i} + (L \sin \theta - h) \mathbf{j} + 0.$$

Por otro lado  $\|\mathbf{r}_{ab}\|^2 = L^2$  se tiene entonces que

$$L^2 \cos^2 \theta + (L \sin \theta - h)^2 = L^2.$$

es decir

$$\underbrace{L^2 \cos^2 \theta + L^2 \sin^2 \theta}_{L^2} + h^2 - 2Lh \sin \theta = L^2$$

### Punto de masas de la articulación (continuación)

$$h^2 - 2Lh \sin \theta = 0 \Rightarrow h(h - 2L \sin \theta) = 0 \Rightarrow h = 2L \sin \theta.$$

Luego la masa  $M$  está situada en

$$\mathbf{r} = 0\mathbf{i} + 2L \sin \theta \mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Asumiendo que  $\theta = \theta(t)$  obtenemos finalmente la posición de la masa  $M$  :

$$\mathbf{r}(t) = 0\mathbf{i} + 2L \sin \theta(t) \mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Entonces

$$\mathbf{v}(t) = 0\mathbf{i} + 2L \frac{d\theta(t)}{dt} \cos \theta(t) \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = 0\mathbf{i} + \left( 2L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \cos \theta(t) - 2L \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \sin \theta(t) \right) \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

## Descripción del salto

La fuerza ejercida sobre el punto  $\mathbf{r}(t)$ , si suponemos que la fuerza  $\mathbf{F}_{up}$  ejercida para vencer la fuerza de la gravedad terrestre es:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_{up}(t) - M(0\mathbf{i} + g\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\ = & M \left( 0\mathbf{i} + \left( 2L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \cos \theta(t) - 2L \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \sin \theta(t) \right) \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \right). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_{up}(t) \\ = & M \left( 0\mathbf{i} + \underbrace{\left( g + 2L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \cos \theta(t) - 2L \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \sin \theta(t) \right)}_{\mathbf{a}_{up}(t) = (0\mathbf{i} + g\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) + \mathbf{a}(t)} \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \right). \end{aligned}$$

## Descripción del salto (continuación)

En el momento del salto  $t = 0$  se tiene que cumplir

$$g + 2L \left. \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right|_{t=0} \cos \theta(0) - 2L \left( \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} \right)^2 \sin \theta(0) = 0.$$

## Punto álgido del salto

En el punto álgido del salto  $t = t_{max}$  se tiene que cumplir

$$\mathbf{v}_{up}(t_{max}) = (0\mathbf{i} + g\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) + \mathbf{v}(t_{max}) = \mathbf{0},$$

esto es,

$$g + 2L \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=t_{max}} \cos \theta(t_{max}) = 0,$$