

Cinemática

Antonio Falcó, Ignasi Rosell

Tema 2

1 Posición y trayectoria de un cuerpo

2 La velocidad

3 La aceleración

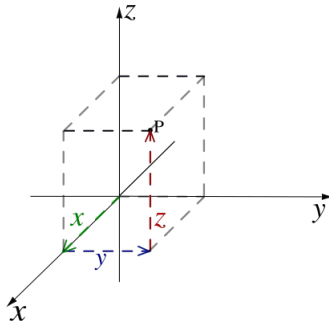
- Movimiento uniforme y rectilíneo
- Movimiento uniformemente acelerado
- Caso práctico: Cálculo del ángulo óptimo de lanzamiento
- Las componentes de la aceleración
- El movimiento circular uniforme
- Caso práctico: Movimiento aeróbico

Dimensiones del espacio

Espacio-tiempo

Vivimos en un mundo que se caracteriza por tener tres dimensiones espaciales y una temporal.

Solo podemos trazar tres líneas perpendiculares entre si que coincidan en un punto, y no más.



Punto Material

Definición

Un **punto material** es una idealización física en la que se considera el cuerpo en estudio como si fuese puntual, es decir carente de dimensiones, cualquiera que sea su tamaño, dependiendo tan solo del contexto del problema a tratar.

El paradigma de esta idealización es considerar cuerpos de gran tamaño, como los planetas, como si fuesen masas puntuales o partículas, a los efectos de aplicar las leyes de la Gravitación Universal.

Desde un punto de vista cinématico, el único tipo de movimiento de una partícula es el movimiento de traslación, ya que al carecer de dimensiones no puede poseer rotaciones intrínsecas o movimiento de rotación.

Existen en física otras abstracciones de sistemas en estudio como los sistemas de partículas y los sólidos rígidos entre otros.

Sistemas de referencia

Definición

Un sistema de referencia o marco de referencia es un conjunto de convenciones usadas por un observador para poder medir la posición y otras magnitudes físicas de un objeto o sistema físico en el tiempo y el espacio.

$$\text{Sistema de referencia : } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}, \\ \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \end{array} \right.$$

Relatividad de la posición

La posición **no es una propiedad intrínseca del mismo, sino relativa** a un objeto o conjunto de objetos, ligados al observador, que se toman como sistema de referencia.

Sistema de referencia canónico

Ejemplo

Tomamos el sistema de referencia canónico

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)\}$$

que asume que el observador está en el origen de coordenadas (0, 0, 0).

Ejemplo

Una trayectoria de un punto material

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (-t^2 + 4t + 2)\mathbf{k}.$$

En este caso

$$x(t) = 1, y(t) = 2t, z(t) = -t^2 + 4t + 2.$$

Definición

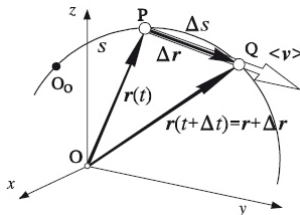
Un punto se desplaza de P a Q en un intervalo de tiempo Δt a lo largo de una trayectoria $\mathbf{t}$. Supongamos que $\mathbf{r}(t) = P$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t) = Q$.

Entonces

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

La velocidad media se define

$$\mathbf{v}_{media} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$



Ejemplos

Ejemplo

Por ejemplo, si un objeto recorre una distancia de 1 metro en un lapso de 31.63 segundos, el módulo de su velocidad media es:

$$\|\mathbf{v}_{media}\| = \frac{\|\Delta \mathbf{r}\|}{\Delta t} = \frac{1}{31.63} = 0.0316 \text{ m/s}$$

Ejemplo

Para la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (-t^2 + 4t + 2)\mathbf{k}$, en $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 2)$ y en $\Delta t = 0.01$ segundos se encuentra en

$$\mathbf{r}(0 + \underbrace{0.01}_{\Delta t}) = \mathbf{r}(0.01) = (1, 0.02, 2.0399),$$

en este caso $\mathbf{v}_{media} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{(1, 0.02, 2.0399) - (1, 0, 2)}{0.01} = (0, 0.02, 0.0399) \frac{1}{10^{-2}} = (0, 2, 3.99) \text{ m/s}$.

Velocidad instantánea

Definición

La velocidad instantánea se define como

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{media} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Cálculo de la velocidad instantánea

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \\ &= \frac{d}{dt} (x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}) \\ &= \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ejemplos

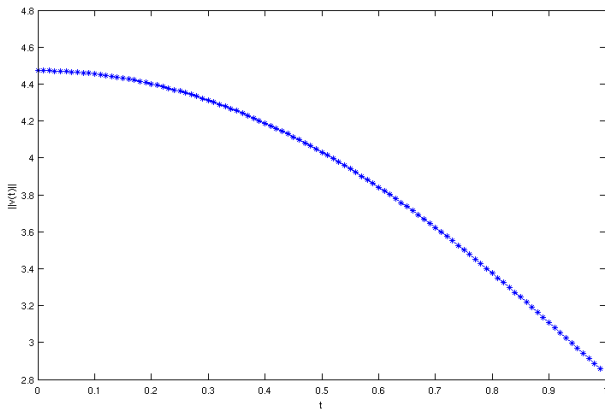
Ejemplo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (-t^2 + 4t + 2)\mathbf{k}) \\&= \frac{d}{dt}(1 \cdot \mathbf{i} + 2t \cdot \mathbf{j} + (-t^2 + 4t + 2) \cdot \mathbf{k}) \\&= \frac{d(1)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(2t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{d(-t^2 + 4t + 2)}{dt}\mathbf{k}. \\&= 0 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + (-2t + 4) \cdot \mathbf{k} \\&= (0, 2, -2t + 4).\end{aligned}$$

El módulo de la velocidad nos dará su magnitud

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{4 + (-2t + 4)^2}.$$

Gráfica del módulo de la velocidad



La aceleración

Definición

Se define **la aceleración** como

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Cálculo de la aceleración

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) \\ &= \frac{d}{dt} (v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k}) \\ &= \frac{dv_x(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ejemplo

Ejemplo

Consideremos la velocidad calculada previamente

$\mathbf{v}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + (-2t + 4) \cdot \mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \frac{d}{dt}(0 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + (-2t + 4) \cdot \mathbf{k}) \\ &= \frac{d(0)}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{d(2)}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{d(-2t + 4)}{dt} \cdot \mathbf{k} \\ &= 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + (-2) \cdot \mathbf{k}.\end{aligned}$$

En este caso la aceleración no depende de t , y en consecuencia es constante.

La aceleración es una magnitud dinámica básica

Problema inverso

Supongamos que conocemos que un punto material se mueve con aceleración

$$\mathbf{a}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + (-2) \cdot \mathbf{k}$$

siendo velocidad inicial era de $\mathbf{v}(0) = (0, 2, 4)$ y que su posición inicial era $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 2)$

Cuestión

¿Podemos calcular la trayectoria completa con estos datos?

Veamoslo



$$\mathbf{a}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + (-2) \cdot \mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \cdot \mathbf{k}$$

- Igualando componente a componente

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0, \frac{dv_y(t)}{dt} = 0, \frac{dv_z(t)}{dt} = -2.$$

- Luego $v_x(t) = K_x$, $v_y(t) = K_y$, $dv_z(t) = (-2)dt$.
- Conocemos $\mathbf{v}(0) = (0, 2, 4) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0))$. Luego

$$v_x(0) = 0 = K_x, v_y(0) = 2 = K_y.$$

- $v_x(t) = 0$, $v_y(t) = 2$

Cálculo de la última componente de la velocidad

- Partimos de la expresión $dv_z(t) = (-2)dt$
- Empleamos la operación inversa a la derivada:

$$\int dv_z(t) = v_z(t)$$

•

$$\int dv_z(t) = \int (-2)dt = -2t + K_z$$

- Es decir $v_z(t) = -2t + K_z$.
- Como $v_z(0) = 4$ obtenemos sustituyendo en la expresión anterior
- $v_z(0) = K_z$ de donde
- $v_z(t) = -2t + 4$.

Cálculo de la posición

- Conocemos ahora que

$$\mathbf{v}(z) = 0 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + (-2t + 4)\mathbf{k}$$

- por otro lado

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \mathbf{k}$$

- igualando

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dy(t)}{dt} = 2, \quad \frac{dz(t)}{dt} = (-2t + 4).$$

Cálculo de las componentes del vector posición

$$\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 2).$$

•

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 \Rightarrow x(t) = K_x \Rightarrow x(0) = 1 = K_x.$$

•

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2 \Rightarrow y(t) = 2t$$

•

$$\frac{dz(t)}{dt} = (-2t + 4) \Rightarrow z(t) = \int (-2t + 4)dt + K_z = -t^2 + 4t + K_z$$

• $z(t) = -t^2 + 4t + 2.$

Movimiento uniforme

Definición

*Cuando un cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria con una velocidad cuyo módulo es constante se dice que el movimiento es **uniforme**.*

Velocidad constante

Aceleración nula

Si la aceleración es nula, esto es,

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

Entonces empleando una argumentación similar a la anterior obtenemos que la velocidad es constante. esto es,

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0))$$

y el movimiento es uniforme. Finalmente

$$\mathbf{r}(t) = (v_x(0)t + x(0), v_y(0)t + y(0), v_z(0)t + z(0))$$

Movimiento rectilíneo

Observación

Si

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

Entonces $\mathbf{v}(t) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0)) = \mathbf{v}(0)$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (v_x(0)t + x(0), v_y(0)t + y(0), v_z(0)t + z(0)) \\ &= (v_x(0)t, v_y(0)t, v_z(0)t) + (x(0), y(0), z(0)) \\ &= (v_x(0), v_y(0), v_z(0)) \cdot t + (x(0), y(0), z(0)) \\ &= \mathbf{v}(0)t + \mathbf{r}(0).\end{aligned}$$

La trayectoria se mueve a lo largo de una recta que para $t = 0$ pasa por el punto $\mathbf{r}(0)$ y lleva la dirección del vector $\mathbf{v}(0)$.

Aceleración constante

Aceleración constante

Si la aceleración es constante, esto es,

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(0), a_y(0), a_z(0)).$$

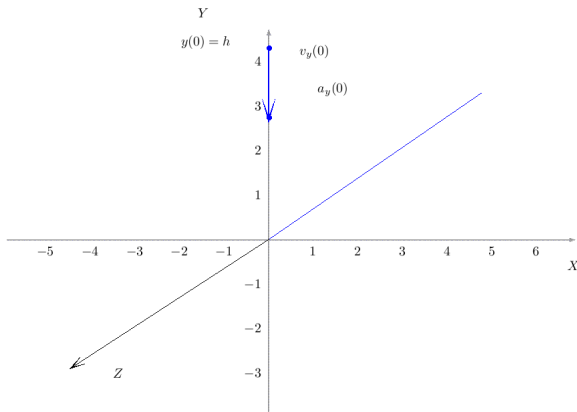
Entonces empleando una argumentación similar a la anterior obtenemos que la velocidad es constante. esto es,

$$\mathbf{v}(t) = (a_x(0)t + v_x(0), a_y(0)t + v_y(0), a_z(0)t + v_z(0)) = \mathbf{a}(0) \cdot t + \mathbf{v}(0)$$

y el movimiento es uniformemente acelerado. Finalmente

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a}(0) \cdot t^2 + \mathbf{v}(0) \cdot t + \mathbf{r}(0).$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión



Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Definición

Consideremos la trayectoria un punto material en una dimensión

$$\mathbf{r}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

Entonces, tanto la velocidad como la aceleración son unidimensionales:

$$\mathbf{v}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + v_y(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}, \mathbf{a}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} + a_y(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

Si el movimiento es uniformemente acelerado $a_y(t) = a_y(0)$, entonces

$$v_y(t) = a_y(0) \cdot t + v_y(0)$$

y

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot a_y(0) \cdot t^2 + v_y(0) \cdot t + y(0)$$

Relación entre posición y velocidad

Prueba

Despejamos t de $v_y(t) = a_y(0) \cdot t + v_y(0)$ esto es

$$v_y(t) - v_y(0) = a_y(0) \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_y(t) - v_y(0)}{a_y(0)}$$

de donde sustituyendo en la segunda ecuación

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot a_y(0) \cdot \left(\frac{v_y(t) - v_y(0)}{a_y(0)} \right)^2 + v_y(0) \cdot \left(\frac{v_y(t) - v_y(0)}{a_y(0)} \right) + y(0),$$

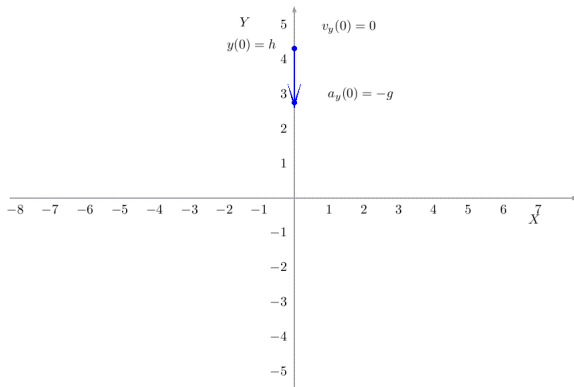
simplificando

$$y(t) = y(0) + \frac{v_y^2(t) - v_y^2(0)}{2a_y(0)},$$

es decir

$$v_y^2(t) - v_y^2(0) = 2a_y(0)(y(t) - y(0)).$$

Modelizando la caída libre sin rozamiento con el aire



Modelizando la caída libre sin rozamiento con el aire

Ejemplo

Consideremos un punto material unidimensional situado sobre una plataforma en $t = 0$, de altura h esto es $y(0) = h$ y lo dejamos caer con aceleración constante (la de la gravedad) $a_y(0) = -g$ que es negativa ya que apunta hacia abajo, y con velocidad inicial nula $v_y(0) = 0$.

Obtenemos

$$v_y^2(t) = -2g(y(t) - h) = 2g(h - y(t)) \text{ ya que } y(t) < h.$$

La velocidad de caída es entonces

$$v_y(t) = \sqrt{2g(h - y(t))}.$$

En el instante t_{suelo} que llega al suelo $x(t_{\text{suelo}}) = 0$ y se tiene que la velocidad de impacto al suelo es

$$v_y(t_{\text{suelo}}) = \sqrt{2g(h - x(t_{\text{suelo}}))} = \sqrt{2gh}.$$

Problema

Una persona salta desde una altura de 1.70 metros. ¿Cuál será la velocidad de choque contra el suelo si consideramos que $g = 9.8ms^{-2}$?
¿Y el tiempo de caída?

Solución

$$v_y(t_{suelo}) = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 1.7} = 5.7723ms^{-1}.$$

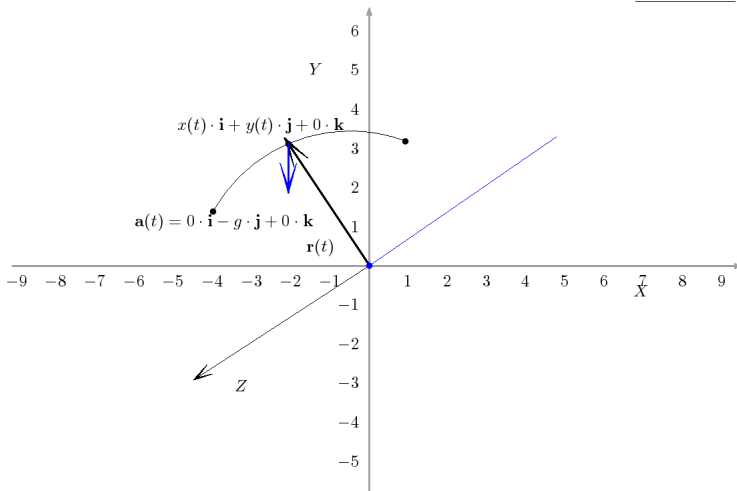
Como el movimiento es uniformemente acelerado

$$v_y(t) = a_y(0) \cdot t + v_y(0) = -g \cdot t,$$

entonces

$$v_y^2(t_{suelo}) = (-9.8 \cdot t_{suelo})^2 = (5.7723)^2 \Rightarrow t_{suelo} = \sqrt{\frac{(5.7723)^2}{(9.8)^2}} = 0.58902 \text{ s.}$$

Movimiento uniformemente acelerado en dos dimensiones



Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Definición

Consideremos la trayectoria un punto material en dos dimensión

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

Entonces, tanto la velocidad como la aceleración son bidimensionales:

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t) \cdot \mathbf{i} + v_y(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}, \mathbf{a}(t) = a_x(t) \cdot \mathbf{i} + a_y(t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

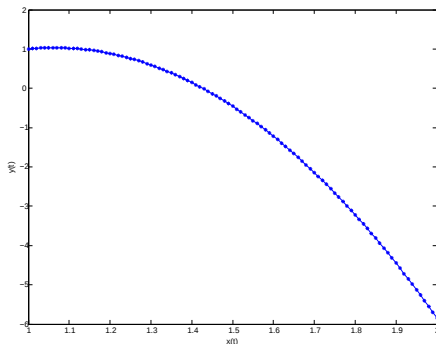
Si el movimiento es uniformemente acelerado debido a la aceleración de la gravedad $\mathbf{a}(t) = 0 \cdot \mathbf{i} - g \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$, entonces la velocidad y la posición:

$$\mathbf{v}(t) = v_x(0) \cdot \mathbf{i} + (-gt + v_y(0)) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}(t) = (v_x(0)t + x(0)) \cdot \mathbf{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_y(0)t + y(0)\right) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

Movimiento parabólico

$$x(0) = 1, y(0) = 1, v_x(0) = 1, v_y(0) = 1, g = 9.8 \text{ m/s}^2.$$



Trayectoria geométrica vs. trayectoria cinemática

Procedimiento

El procedimiento de pasar de la trayectoria cinemática a la geométrica consiste en eliminar el tiempo de las ecuaciones que lo caracterizan: Para la posición

$$x(t) = v_x(0)t + x(0) \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y(0)t + y(0)$$

entonces

$$t = \frac{x(t) - x(0)}{v_x(0)}$$

y despejando en la segunda ecuación obtenemos

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x(t) - x(0)}{v_x(0)} \right)^2 + v_y(0) \left(\frac{x(t) - x(0)}{v_x(0)} \right) + y(0).$$

Ecuación geométrica

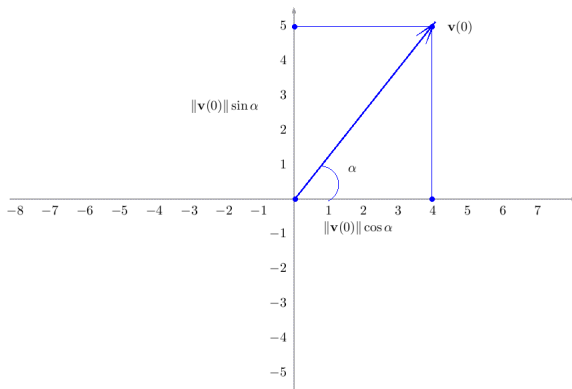
Definición

La expresión anterior nos determina la dependencia entre x e t sin el efecto del tiempo t , podemos escribir entonces:

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x - x(0)}{v_x} \right)^2 + v_y(0) \left(\frac{x - x(0)}{v_x} \right) + y(0).$$

que es la ecuación de una parábola en el plano XY y describe el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad terrestre que recibe el nombre de movimiento parabólico.

Ángulo de lanzamiento



Introduciendo el ángulo de lanzamiento

Procedimiento

Tomamos

$$v_x(0) = \|\mathbf{v}(0)\| \cos \alpha \text{ y } v_y(0) = \|\mathbf{v}(0)\| \sin \alpha.$$

Sustituimos en la ecuación geométrica del movimiento parabólico obteniendo

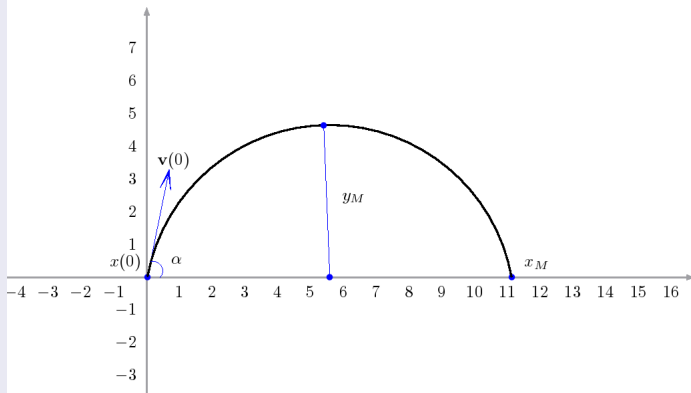
$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x - x(0)}{\|\mathbf{v}(0)\| \cos \alpha} \right)^2 + \|\mathbf{v}(0)\| \sin \alpha \left(\frac{x - x(0)}{\|\mathbf{v}(0)\| \cos \alpha} \right) + y(0),$$

es decir

$$y = -\frac{g}{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha} \cdot (x - x(0))^2 + \tan \alpha \cdot (x - x(0)) + y(0).$$

Ángulo óptimo de lanzamiento

Análisis de la trayectoria



Ángulo óptimo de lanzamiento

Análisis de la trayectoria

Consideramos $x(0) = y(0) = 0$ e $y = 0$ el punto donde el móvil impacta con el suelo. Entonces la ecuación geométrica del movimiento parabólico queda:

$$0 = -\frac{g}{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x,$$

esto es,

$$0 = x \cdot \left(-\frac{g}{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha \right),$$

sacando factor común x . La parábola se hace cero para $x = 0$ y para

$$-\frac{g}{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \tan \alpha = 0, \text{ despejando } x \text{ obtenemos}$$

$$x_M = \frac{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g} = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g}$$

Discusión

Discusión

Recordemos la fórmula del ángulo doble

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Podemos entonces escribir

$$x_M = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cdot \sin 2\alpha}{g},$$

el ángulo α varía entre 0 y $\pi/2$ radianes que son 90° . Luego

$$0 \leq \sin 2\alpha \leq 1 \text{ cuando } 0 \leq 2\alpha \leq \pi/2 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

de aquí

$$0 < x_M = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2}{g} \cdot \sin 2\alpha \leq \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2}{g}.$$

Conclusión

Conclusión

La altura máxima para una magnitud de velocidad inicial dada $\|\mathbf{v}(0)\|$ en m/s, se alcanza cuando

$$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} (45^\circ),$$

siendo la longitud máxima alcanzada igual a

$$x_M = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2}{g}.$$

Altura máxima de la trayectoria

Procedimiento

Si

$$y = -\frac{g}{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x = -\frac{\tan \alpha}{x_M} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x,$$

recordemos que

$$x_M = \frac{2\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g},$$

el máximo valor de y_M se alcanza donde x cumple

$$0 = \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \tan \alpha}{x_M} \cdot x + \tan \alpha, \text{ es decir } x^* = \frac{x_M}{2}$$

sustituyendo su valor en la primera ecuación la altura máxima es

$$y_M = \tan \alpha \cdot (x_M/4).$$

Resumen

Lanzamiento parabólico

Longitud máxima:

$$x = x_M = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}, y = 0.$$

Altura máxima:

$$x = \frac{x_M}{2}, y = y_M = \tan \alpha \cdot \frac{x_M}{4} \Rightarrow \tan \alpha = 4 \cdot \frac{y_M}{x_M}.$$

Trayectoria geométrica:

$$y = -\frac{\tan \alpha}{x_M} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x = -4 \cdot \frac{y_M}{x_M^2} \cdot x^2 + 4 \cdot \frac{y_M}{x_M} \cdot x.$$

Problema

Un lanzador de peso lanza la bola con un ángulo de 42° con una velocidad inicial de 10.23 ms^{-1} . Calcular la altura máxima y la longitud máxima alcanzada por la bola conciendo que la altura del suelo al hombro del lanzador es de 1.79 metros

Solución

En primer lugar si 45° son $\pi/2$ radianes entonces 42° serán $\frac{42}{45} \cdot \frac{\pi}{2} \approx 1.4661$ radianes. Entonces

$$x_M = \frac{\|\mathbf{v}(0)\|^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{(10.23)^2 \cdot \sin(2 \cdot 1.4661)}{9.8} = 2.2198 \text{ m}$$

la altura máxima desde el hombro del lanzador es:

$$y_M = \tan \alpha \cdot \frac{x_M}{4} = \tan(1.4661) \cdot \frac{2.2198}{4} = 5.2812 \text{ m}$$

Procedimiento

Definición

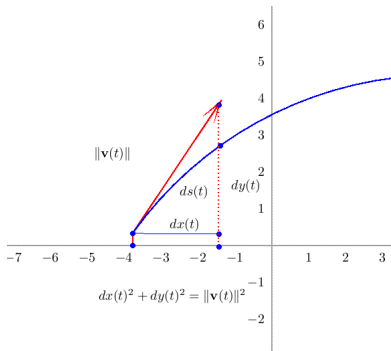
Descomponemos $\mathbf{v}(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \cdot \mathbf{u}_T(t)$ con $\|\mathbf{u}_T(t)\| = 1$. Entonces se define la longitud de arco $s(t)$ de la trayectoria como

$$ds(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \cdot dt = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2} \cdot dt.$$

Al vector $\mathbf{u}_T(t)$ se le denomina vector tangente a la trayectoria. Si $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces

$$\begin{aligned} ds(t) &= \sqrt{(v_x(t)dt)^2 + (v_y(t)dt)^2 + (v_z(t)dt)^2} \\ &= \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2}. \end{aligned}$$

Graficamente



Descomposición de la aceleración

Procedimiento

- Como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}(t)\| \cdot \mathbf{u}_T(t)) = \frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} \cdot \mathbf{u}_T(t) + \|\mathbf{v}(t)\| \cdot \frac{d\mathbf{u}_T(t)}{dt}.$$

- Nótese que $d\mathbf{u}_T(t) = \mathbf{u}_T(t) - \mathbf{u}_T(t + dt)$ y este vector es perpendicular a $\mathbf{u}_T$, esto es,

$$d\mathbf{u}_t(t) \cdot \mathbf{u}_T = 0.$$

el producto escalar es cero.

- Sea $\mathbf{u}_N(t)$ un vector $\mathbf{u}_N(t) \perp \mathbf{u}_T(t)$ de módulo $\|\mathbf{u}_N(t)\| = 1$.
Entonces

$$d\mathbf{u}_T(t) = d\alpha(t) \cdot \mathbf{u}_N(t) = \frac{ds(t)}{R(t)} \cdot \mathbf{u}_N(t).$$

Conclusión

Conclusión

- Finalmente

$$\frac{d\mathbf{u}_T(t)}{dt} = \frac{1}{R(t)} \cdot \frac{ds(t)}{dt} \cdot \mathbf{u}_N(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t)\|}{R(t)} \cdot \mathbf{u}_N(t)$$

- La descomposición de la aceleración en sus componentes tangencial y normal es:

$$\mathbf{a}(t) = \underbrace{\frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} \cdot \mathbf{u}_T(t)}_{\mathbf{a}_T(t)} + \underbrace{\frac{\|\mathbf{v}(t)\|^2}{R(t)} \cdot \mathbf{u}_N(t)}_{\mathbf{a}_N(t)}$$

- Además,

$$\|\mathbf{a}(t)\|^2 = \left(\frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} \right)^2 + \frac{\|\mathbf{v}(t)\|^4}{R^2(t)}.$$

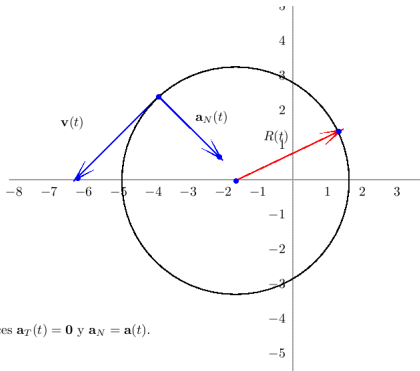
Clasificación del movimiento

Clasificación

- 1 Si $\|\mathbf{v}(t)\| = 0$, tenemos **movimiento uniforme y rectilíneo**. En este caso $\mathbf{a}(t) = 0$.
- 2 Si $\|\mathbf{v}(t)\| = \text{constante} \neq 0$, entonces $\mathbf{a}_T(t) = 0$ y $\mathbf{a}_N(t) \neq 0$ y tenemos el **movimiento uniforme no rectilíneo**.
- 3 Si $R(t) = \infty$ entonces $\mathbf{a}_N(t) = 0$ y $\mathbf{a}_T(t) \neq 0$, tenemos **movimiento rectilíneo**. Si $\mathbf{a}_T(t) = \text{constante}$, tenemos **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado**.
- 4 Si $R(t) = \text{constante}$ tenemos **movimiento circular**. Si $\mathbf{a}_T(t) = \text{constante}$, tenemos **movimiento circular uniformemente acelerado**.

Movimiento circular uniforme

En este caso la **aceleración centrípeta** va dirigida hacia el centro de la circunferencia y $\|\mathbf{a}(t)\| = \frac{C^2}{R}$

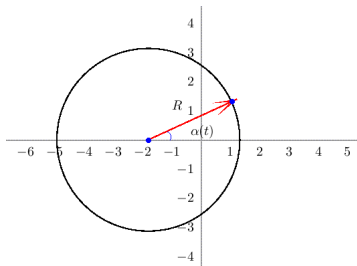


Si $\|\mathbf{v}(t)\| = C$ entonces $\mathbf{a}_T(t) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a}_N = \mathbf{a}(t)$.

Velocidad angular

Se define la velocidad angular como el ángulo recorrido por unidad de tiempo:

$$\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}.$$



Propiedades de la velocidad angular

Propiedades

Recordemos que

$$ds(t) = \underbrace{R \cdot d\alpha(t)} = \|\mathbf{v}(t)\| \cdot dt.$$

despejando el módulo de la velocidad de la igualdad entre llaves:

$$R \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} = \|\mathbf{v}(t)\|,$$

entonces

$$\|\mathbf{v}(t)\| = R \cdot \omega(t)$$

y

$$\mathbf{a}_N(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t)\|^2}{R} \cdot \mathbf{u}_N(t) = R \cdot \omega(t)^2 \cdot \mathbf{u}_N(t).$$

Movimiento circular uniforme

Propiedades

Si la velocidad angular es constante $\omega(t) = \omega$ entonces

$$\|\mathbf{v}(t)\| = R \cdot \omega$$

y

$$\mathbf{a}_N(t) = R \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{u}_N(t).$$

Además,

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega \cdot t$$

$$s(t) = s_0 + R \cdot \omega \cdot t.$$

Periodo y frecuencia

Definición

Si llama **periodo** T al intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones iguales:

$$\alpha(t + T) = \alpha(t) + 2\pi \Rightarrow \alpha_0 + \omega \cdot (t + T) = \alpha_0 + \omega \cdot t + 2\pi$$

despejando

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Se llama **frecuencia** f al número de vueltas por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Como $[\omega] = T^{-1}$, entonces $[f] = T^{-1}$ se define entonces

$$\text{Hz (hercio)} = s^{-1}(\text{segundo}^{-1}).$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

Caracterización

Si la velocidad angular $\omega(t)$ no es constante, entonces se puede definir la **aceleración angular** como

$$\beta(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} = R \cdot \beta(t).$$

Si la aceleración angular es constante $\beta(t) = \beta$ entonces

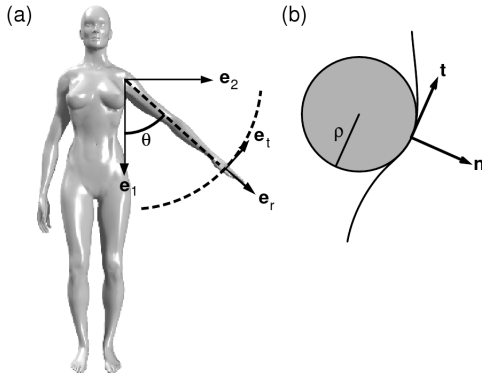
$$\frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} = R \cdot \beta \Rightarrow \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{v}(0)\| + R \cdot \beta \cdot t.$$

Si además la aceleración tangencial y normal son constantes y $\|\mathbf{v}(0)\| = 0$, entonces

$$\mathbf{a}(t) = R \cdot \beta \cdot \mathbf{u}_T + R \cdot (\beta \cdot t)^2 \cdot \mathbf{u}_N$$

Caso práctico

Un entrenador de aeróbic mueve su brazo de la posición vertical a la horizontal en 0.6 segundos a velocidad angular constante. Determinar la velocidad y aceleración de su codo. La longitud del brazo hasta el codo es de 0.38 metros.



Solución

Procedimiento

Como la velocidad angular es constante y ω es el ángulo recorrido por unidad de tiempo:

$$\omega = \frac{\pi/2}{0.6} \approx 2.618 \text{ s}^{-1}.$$

Entonces la aceleración angular es nula $\beta = 0$. Esto implica que

$$\frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} = R \cdot \beta = 0 \Rightarrow \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{v}(0)\| = C.$$

Como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\|\mathbf{v}(t)\|}{dt} \cdot \mathbf{u}_T(t) + \frac{\|\mathbf{v}(t)\|^2}{R(t)} \cdot \mathbf{u}_N(t) = R \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{u}_N(t),$$

esto es $\mathbf{a}(t) = 0.38 \cdot (2.618)^2 \cdot \mathbf{u}_N(t) = 2.60 \cdot \mathbf{u}_N(t) \text{ ms}^{-2}$.

Solución

Procedimiento

¿ Cómo podemos calcular la velocidad?

Al ser la velocidad angular constante $\omega \approx 2.618 \text{ s}^{-1}$. Entonces el ángulo $\theta(t)$ viene determinado por la ecuación:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + \omega \cdot t = \omega \cdot t.$$

Entonces podemos describir la trayectoria en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r}(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= -R\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathbf{i} + R\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} \\ &= -0.99484 \cdot \sin(2.618 \cdot t) \cdot \mathbf{i} + 0.99484 \cdot \cos(2.618 \cdot t) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}\end{aligned}$$