

Bioestática

Antonio Falcó, Ignasi Rosell

Tema 2

- 1 Momento Angular
 - Ejemplos
 - Sistemas de partículas

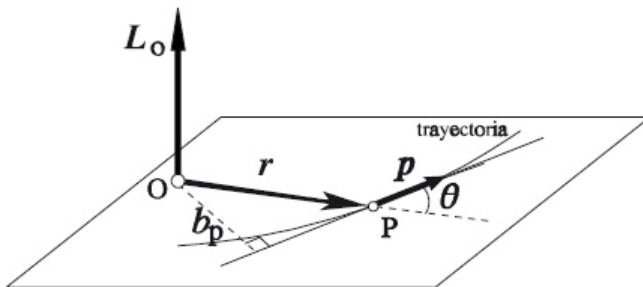
Definición

El momento angular de una partícula material de masa m y que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto un punto $\mathbf{O}$ se define como

$$\mathbf{L}_O(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t),$$

donde

$$\|\mathbf{L}_O(t)\| = \|\mathbf{r}(t)\| \|\mathbf{p}(t)\| \sin \theta.$$



Definición

Se define el momento de una fuerza como

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$$

Relación entre momento angular y momento de una fuerza

$$\frac{d\mathbf{L}_O(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)) = \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{p}(t) \right) + \left(\mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right)$$

Como $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ entonces

$$\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{p}(t) \right) = \mathbf{0}.$$

Finalmente

$$\frac{d\mathbf{L}_O(t)}{dt} = \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{r}(t) \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}(t)) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{a}(t) = \mathbf{M}(t)$$

Módulo del momento de una fuerza

$$\left\| \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right\| = \|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)\| = \|\mathbf{r}(t)\| \|\mathbf{F}(t)\| \sin \alpha$$

siendo α el ángulo entre la fuerza y la posición.

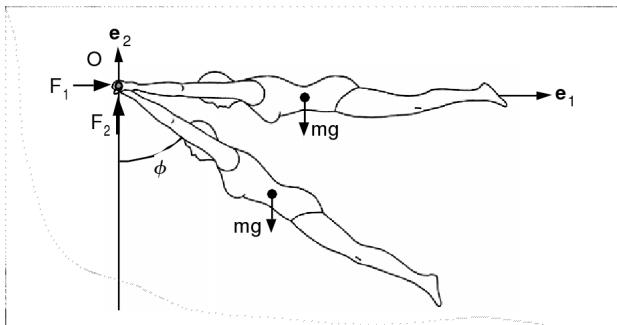
Definición

El momento angular de un conjunto de partículas es la suma de los momentos angulares de cada una:

$$\mathbf{L}_O(t) = \sum_i \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{p}_i(t) = \sum_i \mathbf{L}_i(t)$$

La variación temporal es:

$$\frac{d\mathbf{L}_O(t)}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i(t)}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i(t)$$



$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= ((L/2) \sin \Phi(t), -(L/2) \cos \Phi(t), 0) \\ \mathbf{v}(t) &= \Phi'(t)((L/2) \cos \Phi(t), (L/2) \sin \Phi(t), 0) \\ \mathbf{a}(t) &= \Phi''(t)((L/2) \cos \Phi(t), (L/2) \sin \Phi(t), 0) \\ &\quad + (\Phi'(t))^2(-(L/2) \sin \Phi(t), (L/2) \cos \Phi(t), 0)\end{aligned}$$

Dinámica del ejercicio gimnástico

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0(t) - m(0, g, 0) = (F_0^1(t), F_0^2(t), 0) - m(0, g, 0) = m\mathbf{a}(t),$$

de donde las componentes de la fuerza que actúa sobre 0 son:

$$\begin{aligned} F_0^1(t) &= m [\Phi''(t)(L/2) \cos \Phi(t) - (\Phi'(t))^2(L/2) \sin \Phi(t)] \\ F_0^2(t) - mg &= m [\Phi''(t)(L/2) \sin \Phi(t) + (\Phi'(t))^2(L/2) \cos \Phi(t)] \end{aligned}$$

Cálculo del momento respecto O con $\mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O(t) &= ((L/2) \sin \Phi(t), -(L/2) \cos \Phi(t), 0) \\ &\quad \times m\Phi'(t)((L/2) \cos \Phi(t), (L/2) \sin \Phi(t), 0) \\ &= (0, 0, m\Phi'(t)(L/2)^2). \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}(t) = (0, 0, m\Phi''(t)(L/2)^2)$$

Caracterización del movimiento angular durante el ejercicio

Por otro lado,

$$\mathbf{M}(t) = (0, 0, m\Phi''(t)(L/2)^2) = \mathbf{r}_0(t) \times \mathbf{F}_0(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{m}(0, -g, 0),$$

entonces como el momento de la fuerza $\mathbf{F}(t)$ se mide con respecto a O , tenemos que la contribución de la fuerza $\mathbf{F}_0(t)$ situada en O con respecto este mismo punto es cero ($\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{0}$.)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= (L/2) \sin \Phi(t), -(L/2) \cos \Phi(t), 0 \times (0, -mg, 0) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (L/2) \sin \Phi(t) & -(L/2) \cos \Phi(t) & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, -mg(L/2) \sin \Phi(t)). \end{aligned}$$

Caracterización del ángulo $\Phi(t)$

Igualando las expresiones para el momento de la fuerza:

$$\mathbf{M}(t) = (0, 0, m\Phi''(t)(L/2)^2) = (0, 0, -mg(L/2) \sin \Phi(t))$$

obtenemos igualando

$$m\Phi''(t)(L/2)^2 = -mg(L/2) \sin \Phi(t)$$

y despejando

$$\Phi''(t) = -\frac{2g}{L} \sin \Phi(t).$$

La aproximación se obtiene a partir de la discretización

$$\frac{\Phi(t_{i+1}) - 2\Phi(t_i) + \Phi(t_{i-1}))}{h^2} = -\frac{2g}{L} \sin \Phi(t_i)$$

donde $t_i = ih$ para $i = 0, 1, \dots, n$ siendo $h = T/n$, y conocemos $\Phi(0)$ y $\Phi'(0)$.

Aproximación numérica del ángulo $\Phi(t)$

Al conocer

$$\Phi(0) = \Phi(t_0) \text{ y } \Phi'(0) = \frac{\Phi(t_1) - \Phi(t_0)}{h}$$

obtenemos

$$\Phi(t_1) = \Phi(t_0) + h\Phi'(0).$$

Resolvemos entonces la ecuación en diferencias:

$$\Phi(t_{i+1}) = 2\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}) - h^2 \frac{2g}{L} \sin \Phi(t_i).$$

para $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo

Consideremos $L = 1$, $h = 1/20$, $\Phi(0) = \frac{\pi}{4}$ y $\Phi'(0) = \frac{\pi}{4}$. Entonces

$$\Phi(t_{i+1}) = 2\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}) - 0.05 \sin \Phi(t_i).$$

```
>> y(0)=pi/4
??? Attempted to access (0); index must be a positive integer or logical.

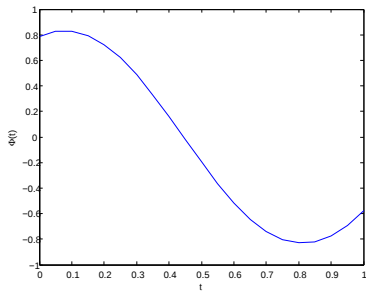
>> y(1)=pi/4
|
y =

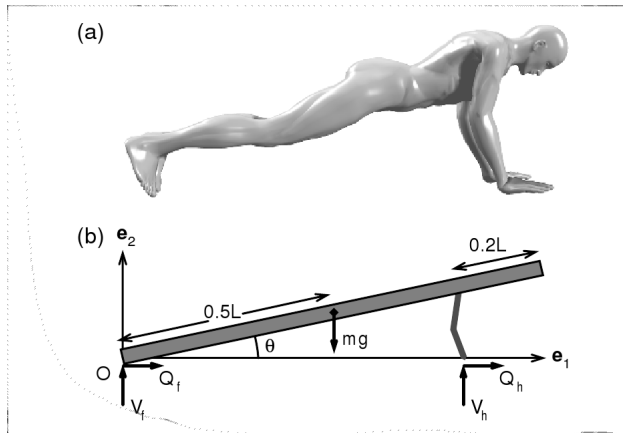
    0.7854

>> y(2)=y(1)+h*pi/4
y =

    0.7854    0.8247

>> for i=2:21
y(i+1)=2*y(i)-y(i-1)-0.05*sin(y(i));
end
>> plot(y)
>> x(1)=0
```





Determina las fuerzas verticales sobre los pies y las manos durante el ejercicio físico (Suponemos $Q_h = 0$).

Ejercicio

- 1 *Determina la posición, velocidad y aceleración del punto P marcado en la figura anterior con mg .*
- 2 *Determina las ecuaciones que caracterizan las componentes Q_h, V_h, Q_f, V_f .*
- 3 *Calcula el momento de la fuerza en P respecto O empleando el momento angular respecto O .*
- 4 *Calcula el momento de la fuerza en P respecto O empleando de la suma de los momentos de la fuerzas ejercidas sobre P durante el ejercicio físico.*
- 5 *Discute brevemente los resultados.*

Centro de masas de un sistema de partículas

Como

$$\sum_i m_i \mathbf{r}^c(t) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i(t) \text{ y } \sum_i \mathbf{F}_{i,i} = \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{a}^c(t).$$

Podemos calcular el momento angular respecto O como

$$\mathbf{L}_0(t) = \sum_i \mathbf{r}^{i,0}(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}_0(t)}{dt} = \sum_i \mathbf{r}^{i,0}(t) \times \mathbf{F}_i(t)$$

Entonces podemos establecer que para el momento angular respecto el centro de masas donde $\mathbf{r}^{i,c}(t) = \mathbf{r}^{i,0}(t) - \mathbf{r}^c(t)$:

$$\frac{d\mathbf{L}^c(t)}{dt} = \sum_i \mathbf{r}^{i,c}(t) \times \mathbf{F}_i(t) \Rightarrow \mathbf{L}^c(t) = \sum_i \mathbf{r}^{i,c}(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t)$$

Definición

Para una masa puntual y un eje arbitrario, el momento de inercia es:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} mr^2$$

donde m es la masa del punto, y r es la distancia al eje de rotación.

Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia r_i de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Conservación del momento angular

Supongamos que

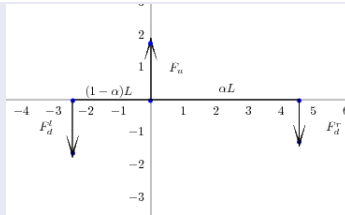
$$\frac{d\mathbf{L}_O(t)}{dt} = \mathbf{0} = \mathbf{M}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t).$$

Entonces:

- ❶ La fuerza $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$.
- ❷ La fuerza $\mathbf{F}(t) \neq \mathbf{0}$ es paralela a la posición $\mathbf{r}(t)$ para cualquier instante de tiempo.

Palancas

Analizemos el sistema siguiente:



Análisis de Equilibrio

En primer lugar la suma de todas las fuerzas tiene que ser cero, esto es, $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ luego

$$(0, F_u, 0) + (0, -F_d^l, 0) + (0, -F_d^r, 0) = (0, 0, 0),$$

esto es,

$$F_u - F_d^l - F_d^r = 0.$$

Por otro lado, como el sistema está estático su momento $\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$, luego $\mathbf{M}_d^l + \mathbf{M}_u + \mathbf{M}_d^r = \mathbf{0}$.

Análisis de Equilibrio

Los momentos respecto cada una de las fuerzas son:

$$\mathbf{M}_d^l = (-(1-\alpha)L, 0, 0) \times (0, -F_d^l, 0) = (0, 0, (1-\alpha)LF_d^l),$$

$$\mathbf{M}_u = (0, 0, 0) \times (0, F_u, 0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{M}_d^r = (\alpha L, 0, 0) \times (0, -F_d^r, 0) = (0, 0, -\alpha LF_d^r),$$

En consecuencia las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} F_u - F_d^l - F_d^r &= 0 \\ (1-\alpha)F_d^l - \alpha F_d^r &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo

Consideremos que existe un objeto de masa m en la parte izquierda de la palanca, esto es, $F_d^l = mg$ entonces las ecuaciones de equilibrio son

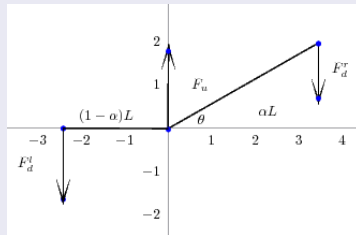
$$\begin{aligned} F_u - mg - F_d^r &= 0, \\ (1 - \alpha)mg - \alpha F_d^r &= 0. \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} F_d^r &= mg \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right), \\ F_u &= mg + F_d^r. \end{aligned}$$

Ejemplo

Considerar ahora el sistema mecánico:



Análisis de Equilibrio

En primer lugar la suma de todas las fuerzas tiene que ser cero, esto es, $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ luego

$$(0, F_u, 0) + (0, -F_d^l, 0) + (0, -F_d^r, 0) = (0, 0, 0),$$

esto es,

$$F_u - F_d^l - F_d^r = 0.$$

Por otro lado, como el sistema está estático su momento $\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$, luego $\mathbf{M}_d^l + \mathbf{M}_u + \mathbf{M}_d^r = \mathbf{0}$.

Análisis de Equilibrio

Los momentos respecto cada una de las fuerzas son:

$$\mathbf{M}_d^l = (-(1 - \alpha)L, 0, 0) \times (0, -F_d^l, 0) = (0, 0, (1 - \alpha)LF_d^l),$$

$$\mathbf{M}_u = (0, 0, 0) \times (0, F_u, 0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{M}_d^r = (\alpha L \cos \theta, \alpha L \sin \theta, 0) \times (0, -F_d^r, 0) = (0, 0, -\alpha LF_d^r \cos \theta),$$

En consecuencia las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} F_u - F_d^l - F_d^r &= 0 \\ (1 - \alpha)F_d^l - \alpha F_d^r \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo

Consideremos que existe un objeto de masa m en la parte izquierda de la palanca, esto es, $F_d^r = mg$ entonces las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned}F_u - mg - F_d^l &= 0, \\(1 - \alpha)F_d^l - \alpha mg \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}F_d^l &= mg \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \cos \theta, \\F_u &= mg + F_d^l.\end{aligned}$$