

Capítulo 10

Fuerzas ficticias

Las fuerzas ficticias son fuerzas que deben incluirse en la descripción de un sistema físico cuando la observación se realiza desde un sistema de referencia no inercial y, a pesar de ello, se insiste en usar las leyes de Newton. O sea, la introducción de fuerzas ficticias hace posible la descripción de un sistema físico usando, por ejemplo, un sistema de referencia uniformemente acelerado o un sistema de referencia fijo a un cuerpo que rota uniformemente. En lo que sigue trataremos sólo estos dos casos.

10.1. Referencial uniformemente acelerado

Sea $S : (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un sistema de referencia inercial y $S' : (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ un sistema de referencia que acelera con aceleración constante $\vec{a}_0$ respecto a S . El vector que une los orígenes O y O' de ambos sistemas de referencia es

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 .$$

Sean $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ los vectores de posición de una masa m en los sistemas de referencia S y S' , respectivamente. La relación entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ es

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' .$$

Derivando dos veces respecto al tiempo se obtiene

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}' = \vec{a}_0 + \ddot{\vec{r}}' ,$$

o sea,

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\vec{a}_0 . \quad (10.1)$$

Sea $\vec{F}$ la fuerza real neta que actúa sobre la masa m , es decir, la fuerza que genera la aceleración $\ddot{\vec{r}}$ de la masa m observada desde un sistema de referencia inercial. En otras palabras

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} .$$

Si se insiste en usar la segunda ley de Newton, pero con las magnitudes observadas desde un sistema de referencia acelerado, se tiene

$$\vec{F}' = m \ddot{\vec{r}}' ,$$

pero la fuerza $\vec{F}'$ ahora ya no es $\vec{F}$ sino que, de acuerdo con la ecuación (10.1),

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 .$$

El término $-m\vec{a}_0 = \vec{F}_{\text{fict}}$ es la fuerza ficticia que hay que agregar a la fuerza real $\vec{F}$ para poder seguir usando la segunda ley de Newton desde un sistema acelerado con aceleración $\vec{a}$.

Observe que esta fuerza ficticia actúa como un campo gravitacional constante (adicional al campo gravitacional $\vec{g}$ que pudiese estar presente).

Ejemplo: Consideremos un péndulo sobre un carro que acelera con aceleración constante $\vec{a} = a_0 \hat{x}$ (ver figura 10.1). Encontremos el ángulo α entre la normal y la posición de equilibrio del péndulo.

Resolveremos el problema de dos maneras: i) usando primero el sistema de referencia inercial del observador O y ii) el sistema de referencia acelerado fijo a O' .

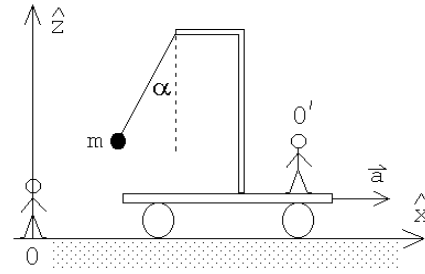


Figura 10.1

i) En el sistema de referencia inercial el diagrama de cuerpo libre de la masa m se muestra en la figura 10.2a. La fuerza neta que actúa sobre la masa m es

$$\vec{F} = \vec{\tau} + \vec{F}_g = \tau \cos \alpha \hat{z} + \tau \sin \alpha \hat{x} - mg \hat{z} .$$

En el sistema de referencia inercial la partícula acelera con una aceleración $\vec{a} = a \hat{x}$, luego

$$\vec{F} = \tau \cos \alpha \hat{z} + \tau \sin \alpha \hat{x} - mg \hat{z} = ma \hat{x} .$$

Igualando las componentes de esta ecuación vectorial se obtiene

$$\tau \cos \alpha = mg$$

y

$$\tau \sin \alpha = ma .$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera se deduce finalmente que

$$\tan \alpha = \frac{a}{g} .$$

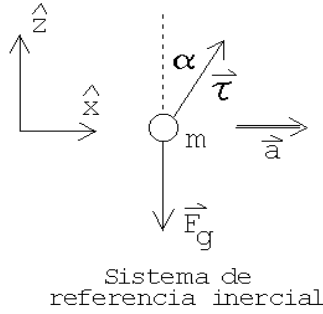


Figura 10.2a

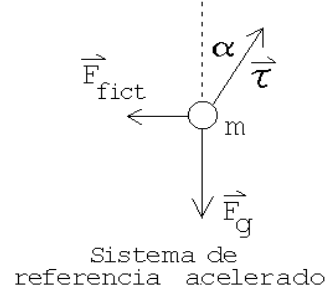


Figura 10.2b

ii) Para un observador sobre el carro la masa m no se mueve. Por eso, para O' la fuerza neta sobre la masa m debe ser nula. El diagrama de cuerpo libre en este caso se muestra en la figura 10.2b. Además de la fuerza ejercida por la tensión del hilo y de la gravedad, debemos agregar la fuerza ficticia $\vec{F}_{\text{fict}} = -ma\hat{x}$. Tenemos

$$\vec{F}' = \vec{\tau} + \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{fict}} = 0 ,$$

o sea

$$0 = \tau \cos \alpha \hat{z} + \tau \sin \alpha \hat{x} - mg \hat{z} - ma \hat{x} .$$

Nuevamente, igualando las componentes de esta ecuación vectorial se deduce que

$$\tau \cos \alpha = mg$$

y

$$\tau \sin \alpha = ma ,$$

o sea, las mismas relaciones encontradas en la parte i).

Para el observador O' sobre el carro, también podríamos haber simplemente considerado un campo gravitacional efectivo (ver figura 10.3).

$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a} = -g \hat{z} - a \hat{x} .$$

Es evidente que el ángulo que $\vec{g}_{\text{eff}}$ hace con la normal cumple con la relación $\tan \alpha = a/g$. Si el péndulo realiza pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio la frecuencia angular de las oscilaciones será

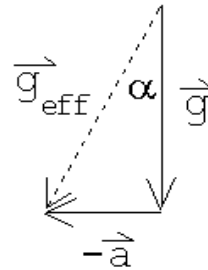


Figura 10.3

$$\omega = \sqrt{\frac{g_{\text{eff}}}{\ell}} = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{\ell}} ,$$

donde ℓ es el largo del péndulo.

10.2. Referencial en rotación uniforme

Sea $S : (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un sistema de referencia inercial y $S' : (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ un sistema de referencia que coincide con el sistema S en cierto instante (por ejemplo, en $t = 0$), pero que rota con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ constante en torno al eje $\hat{z}$ (ver figura 10.4).

Sea $\vec{A}$ un vector con componentes A_x, A_y, A_z en el sistema de referencia S y componentes A'_x, A'_y, A'_z en el sistema de referencia S' , o sea,

$$\vec{A}(t) = A_x(t) \hat{x} + A_y(t) \hat{y} + A_z(t) \hat{z} .$$

y

$$\vec{A}(t) = A'_x(t) \hat{x}' + A'_y(t) \hat{y}' + A'_z(t) \hat{z}' .$$

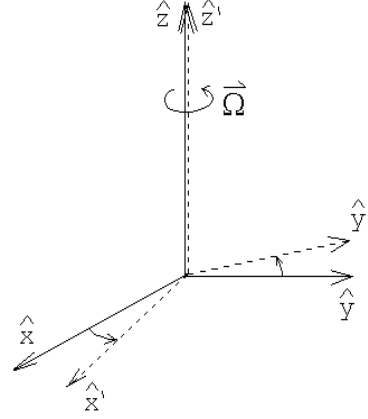


Figura 10.4

Los vectores unitarios del sistema de referencia inercial $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son fijos, sin embargo, los vectores unitarios del sistema de referencia rotatorio $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ rotan, teniéndose

$$\hat{x}' = \cos(\Omega t) \hat{x} + \sin(\Omega t) \hat{y}$$

$$\hat{y}' = \sin(\Omega t) \hat{x} + \cos(\Omega t) \hat{y}$$

$$\hat{z}' = \hat{z} .$$

Derivando estos vectores respecto al tiempo se encuentra

$$\dot{\hat{x}}' = -\Omega \sin(\Omega t) \hat{x} + \Omega \cos(\Omega t) \hat{y} = \Omega \hat{y}'$$

$$\dot{\hat{y}}' = -\Omega \cos(\Omega t) \hat{x} - \Omega \sin(\Omega t) \hat{y} = -\Omega \hat{x}'$$

$$\dot{\hat{z}}' = 0 .$$

Evaluemos la derivada del vector $\vec{A}$ en ambos sistemas de referencia. Por una parte se tiene

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z} ,$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \dot{A}'_x \hat{x} + A'_x \dot{\hat{x}} + \dot{A}'_y \hat{y}' + A'_y \dot{\hat{y}}' + \dot{A}'_z \hat{z}' + A'_z \dot{\hat{z}}' \\ &= (\dot{A}'_x \hat{x} + \dot{A}'_y \hat{y}' + \dot{A}'_z \hat{z}') + \Omega (A'_x \hat{y}' - A'_y \hat{x}') . \end{aligned}$$

Usando las relaciones anteriores y el hecho que

$$\vec{\Omega} \times \vec{A} = \Omega \hat{z}' \times (A'_x(t) \hat{x}' + A'_y(t) \hat{y}' + A'_z(t) \hat{z}') = \Omega (A'_x \hat{y}' - A'_y \hat{x}') ,$$

podemos escribir

$$\left(\dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z} \right) = \left(\dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + \dot{A}'_z \hat{z}' \right) + \vec{\Omega} \times \vec{A},$$

o sea

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{A}. \quad (10.2)$$

En la última expresión los ejes unitarios no aparecen explícitamente, por consiguiente, es una expresión que tiene una validez general (es decir, no sólo para rotaciones en torno al eje $\hat{z}$). La ecuación (10.2) relaciona la derivada temporal de cualquier vector en el sistema de referencia inercial S con la derivada temporal de ese mismo vector, pero observada desde un sistema de referencia S' que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto a S .

Apliquemos la ecuación (10.2) al vector posición $\vec{r}$ de una partícula de masa m . Se tiene

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r},$$

o sea,

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Acá $\vec{v}_S$ es la velocidad de la partícula m observada por el observador inercial S y $\vec{v}_{S'}$ es la velocidad de la misma partícula, pero observada desde el sistema de referencia rotatorio.

Apliquemos nuevamente la ecuación (10.2), pero ahora al vector $\vec{v}_S$. Se tiene

$$\left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_S. \quad (10.3)$$

Usando la ecuación (10.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_S &= \left(\frac{d(\vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{S'}}{dt} \right)_{S'} + \left(\frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt} \right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{S'}}{dt} \right)_{S'} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la última ecuación es la aceleración de la partícula observada por el observador inercial S , denotémosla por $\vec{a}_S$. El primer término al lado derecho es la aceleración de la misma partícula pero observada desde el sistema de referencia rotacional S' , denotémosla por $\vec{a}_{S'}$. De esta manera obtenemos

$$m\vec{a}_{S'} = m\vec{a}_S - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (10.4)$$

Sea $\vec{F}$ la fuerza real neta que actúa sobre la masa m , es decir, la fuerza que genera la aceleración $\vec{a}_S$ de la masa m observada desde un sistema de referencia inercial. En otras palabras

$$\vec{F} = m\vec{a}_S.$$

Si se insiste en usar la segunda ley de Newton, pero con las magnitudes observadas desde un sistema de referencia acelerado, se tiene

$$\vec{F}' = m\vec{a}_{S'} ,$$

pero la fuerza $\vec{F}'$ ahora ya no es $\vec{F}$ sino que, de acuerdo con la ecuación (10.4),

$$\vec{F}' = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} - m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) .$$

Los términos

$$\vec{F}_{\text{fict}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'} - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \quad (10.5)$$

son la fuerza ficticia que hay que agregar a la fuerza real $\vec{F}$ para poder seguir usando la segunda ley de Newton desde un sistema de referencia que rota respecto a un sistema de referencia inercial con velocidad angular $\vec{\Omega}$.

El primer término de la fuerza ficticia dada por la ecuación (10.5) es la así llamada *fuerza de Coriolis*

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{S'}$$

mientras el segundo término se llama *fuerza centrífuga*

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) .$$

Lo interesante de la fuerza de Coriolis es que ella sólo aparece si, en el sistema de referencia rotacional S' , la masa se mueve, y en ese caso, es perpendicular a la dirección de movimiento. Cuando m está en reposo (es decir, $\vec{v}_{S'} = 0$) entonces la única fuerza ficticia que hay que agregar a la fuerza que se observa en un sistema inercial, es la fuerza centrífuga.

Cuando realizamos experimentos en la tierra (laboratorio) siempre asumimos que un sistema fijo al laboratorio representa un sistema de referencia inercial. Sin embargo, la rotación de la tierra en torno a su propio eje (con una frecuencia $\Omega = 2\pi/(24 \cdot 3600) = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) hace que el sistema de referencia no sea inercial y que, en la práctica, debamos en ocasiones agregar la fuerza ficticia (10.5) para obtener una descripción correcta del sistema. La fuerza de Coriolis es responsable de muchos efectos (a veces sorprendentes) que se observan a nuestro alrededor. Por ejemplo, es la responsable de la rotación de los ciclones y de las corrientes marinas o del giro del plano de oscilación de un péndulo.

10.3. Problemas

1. Demuestre que la fuerza centrífuga que actúa sobre una masa m (si ésta es observada desde un sistema de referencia rotacional que gira con velocidad angular Ω respecto a un sistema de referencia inercial) viene dada por

$$\vec{F}_{\text{centrífuga}} = m \Omega^2 \rho \hat{\rho},$$

donde ρ es la distancia entre el eje de rotación y la masa m y $\hat{\rho}$ es un vector unitario que apunta el eje hacia la masa m y es perpendicular al eje de giro (ver figura 10.5). Observe que la fuerza centrífuga tiene la misma magnitud y dirección de la fuerza centrípeta sólo que apunta en el sentido opuesto.

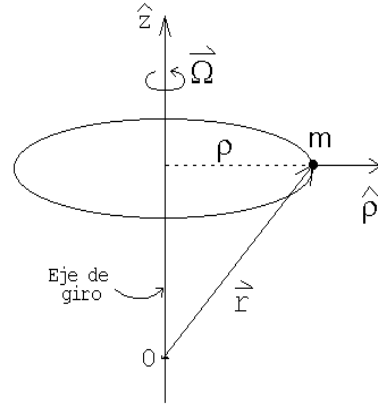


Figura 10.5

2. En un parque de diversiones, los participantes se sostienen contra la pared de un cilindro giratorio mientras el suelo se hunde. El radio del cilindro es $R = 3m$ y el coeficiente de roce entre las personas y la pared del cilindro es $\mu_e = 0,4$. Determine el número mínimo de revoluciones por minuto que se requiere para que el juego funcione.

Haga el cálculo de dos maneras distintas: i) usando un sistema de referencia inercial y ii) usando un sistema de referencia solidario al cilindro.

3. Considere el efecto de la rotación terrestre sobre el movimiento de un proyectil que se lanza desde la superficie terrestre con velocidad $\vec{v}_0$. Suponga que el alcance del proyectil es tal que en todo instante se mueve en un campo gravitacional constante, es decir, $\vec{F}_g = m\vec{g}$.

- a) Demuestre que la velocidad del proyectil viene dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Todas las magnitudes están medidas respecto a un observador solidario con la tierra. Acá $\vec{r}$ es el vector posición del proyectil medido desde el punto de lanzamiento y $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad angular de la tierra.

Al resolver el problema no se debe incluir la fuerza centrífuga ya que ésta está incluida en el valor local de $\vec{g}$ que se está usando. Al rotar la tierra no sólo se modifica la magnitud g sino que también su dirección. La fuerza centrífuga incluso modifica la forma de la tierra; de hecho, la normal a la superficie terrestre usualmente no pasa por el centro de la tierra.

- b) Demuestre que, al despreciar términos del orden Ω^2 , para la aceleración se obtiene la ecuación

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0.$$

(Nuevamente todas las magnitudes medidas desde un sistema de referencia solidario a la tierra). Integre la última ecuación y demuestre que

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \frac{1}{3} \vec{\Omega} \times \vec{g} t^3 - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0 t^2 .$$

4. Desde un edificio de altura $h = 100$ m situado en el Ecuador terrestre, se suelta una piedra. Debido a la rotación terrestre, la piedra no caerá a lo largo de la normal sino que se desviará levemente de ella. Una vez que llega al suelo, encuentre la magnitud y dirección de la desviación. Desprecie efectos debido al roce viscoso con el aire. Indicación: use el resultado obtenido en el problema anterior.

Respuesta: La desviación es hacia el este y es de magnitud

$$\frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 2,19 \text{ cm} .$$

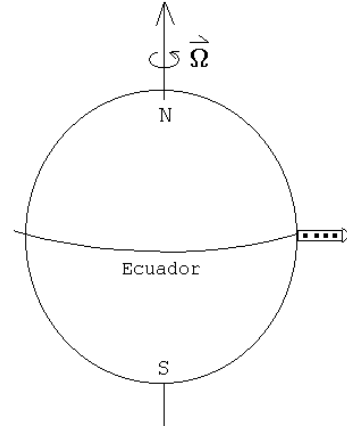


Figura 10.6

5. Desde el Ecuador se lanza un proyectil con velocidad $v_0 = 500$ m/s en la dirección este-oeste, con un ángulo de elevación $\alpha = 10^\circ$. Encuentre como cambia el tiempo que el proyectil tarda en volver a chocar con la tierra y el alcance del proyectil debido a la rotación terrestre. Para resolver este problema no hay que incluir la fuerza centrífuga ya que el efecto de ella ya se incluyó en el vector la aceleración de gravedad $\vec{g}$, que supondremos constante en magnitud y dirección sobre toda la trayectoria. Ignore cualquier efecto debido al roce con el aire y desprecie correcciones del orden Ω^2 .

Respuesta: El alcance disminuye en

$$\Delta D = \frac{4v_0^3 \Omega}{g^2} \sin \alpha \left(\frac{1}{3} \sin \alpha - \cos^2 \alpha \right) \simeq 62,9 \text{ m} .$$

¿Qué pasa si en lugar de dispararlo de este a oeste se dispara de oeste a este o de sur a norte?

6. Considere un canal de ancho a ubicado sobre la tierra a una latitud $\lambda > 0$. Por el canal fluye agua con una velocidad v_0 . Demuestre que el nivel del agua al lado derecho del canal es superior a la del lado izquierdo en una cantidad

$$\Delta h = \frac{2a\Omega v_0 \sin \lambda}{g} ,$$

donde Ω es la velocidad angular de la tierra.

7. Un balde con agua gira en torno a su eje de simetría con velocidad angular Ω . Debido a la rotación, la superficie del agua no será plana. Encuentre su forma.

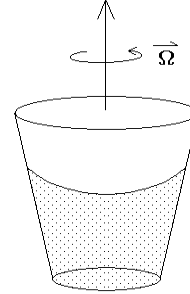


Figura 10.7

8. Considere un péndulo cónico de largo ℓ , cuya masa gira en el plano horizontal en un círculo de radio R . Si se ignora la fuerza de Coriolis, la frecuencia angular del péndulo cónico es $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$, siendo esta independiente del sentido del giro. Demuestre que al incluir la fuerza de Coriolis, las frecuencias en ambos sentidos ya no son iguales, teniéndose

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda$$

y

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda,$$

donde λ es la latitud del lugar en que se encuentra el péndulo.

9. (Péndulo de Foucault)

Al superponer (sumar) las dos soluciones de un péndulo cónico correspondientes al mismo radio de giro, pero rotando en sentidos opuestos, se obtiene la solución de un péndulo simple.

- Demuestre lo anterior en forma explícita para un péndulo cónico ignorando la fuerza de Coriolis.
- Al realizar el mismo cálculo, pero ahora incluyendo el efecto de Coriolis (ver problema anterior), se encuentra que debido a la rotación terrestre, el plano de oscilación del péndulo simple no se mantendrá invariante sino que girará paulatinamente. Demuestre que la velocidad angular con que gira el plano de oscilación del péndulo viene dado por $\omega_F = \Omega \sin \lambda$, donde Ω es la velocidad angular de la tierra en torno a su propio eje y λ es la latitud del lugar en que se encuentra el péndulo.

Foucault fue el primero en demostrar experimentalmente, con un péndulo muy largo, que el plazo de oscilación efectivamente gira a medida que transcurre el tiempo. Observe que en el Ecuador el plano de oscilación no gira, mientras que en los polos da una vuelta completa en 24 horas (después de 6 horas el plano de oscilación habrá girado en 90°).

10. Considere una cuña de masa M y ángulo de elevación α que puede deslizarse sobre un plano horizontal sin roce. Sobre el plano inclinado se encuentra otra masa m , que a su vez también puede deslizarse sobre el plano sin roce. Encuentre la aceleración del plano inclinado M .

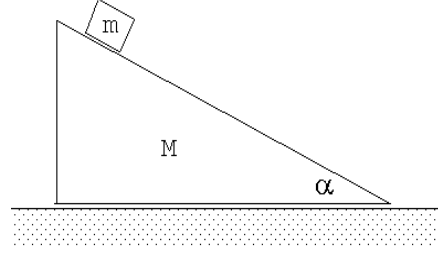


Figura 10.8

10.4. Solución a algunos de los problemas

Solución al problema 3

Como la tierra está girando en torno a su propio eje, la fuerza *efectiva* que actúa sobre el proyectil será

$$\vec{F}_{\text{eff}} = m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

(La fuerza centrífuga $\vec{F}_{\text{centrífuga}} = m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ no debe incluirse ya que su efecto está considerado en el valor local de la aceleración de gravedad $\vec{g}$). Todas las magnitudes en la ecuación anterior se refieren a variables medidas en un sistema fijo a la Tierra, es decir, respecto a un sistema de referencia que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto a un sistema de referencia inercial. ($\vec{\Omega}$ es la velocidad angular de la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje). Al incluir la fuerza efectiva podemos seguir usando la segunda ley de Newton. Se tiene

$$\vec{F}_{\text{eff}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

o sea,

$$m d\vec{v} = m \vec{g} dt - 2m \vec{\Omega} \times d\vec{r}.$$

Integrando (sumando) desde un instante inicial a uno final se obtiene

$$\int_i^f d\vec{v} = \int_i^f \vec{g} dt - 2\vec{\Omega} \times \int_i^f d\vec{r}.$$

Sea $t_i = 0$, $t_f = t$, $\vec{v}_i = \vec{v}_0$, $\vec{v}_f = \vec{v}$, $\vec{r}_i = 0$ y $\vec{r}_f = \vec{r}$. Entonces, evaluando las integrales de la última ecuación se obtiene

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (10.6)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo se encuentra la aceleración

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Reemplazemos $\vec{v}$ en esta ecuación por la expresión dada por (10.6), entonces

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_0 + \vec{g}t - 2\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 - 2 \left(\vec{\Omega} \times \vec{g} \right) t + o(\Omega^2) \end{aligned}$$

Integrando estas expresiones respecto al tiempo se encuentra la velocidad y luego la posición en función de t :

$$\begin{aligned}\int_i^f \vec{a} dt &= \int_i^f \vec{g} dt - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 \int_i^f dt - 2\vec{\Omega} \times \vec{g} \int_i^f t dt \\ \vec{v} - \vec{v}_0 &= \vec{g} t - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 t - \vec{\Omega} \times \vec{g} t^2 \\ \int_i^f \vec{v} dt &= \int_i^f \vec{v}_0 dt + \int_i^f \vec{g} t dt - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_0 \int_i^f t dt - \vec{\Omega} \times \vec{g} \int_i^f t^2 dt \\ \vec{r}(t) &= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - (\vec{\Omega} \times \vec{v}_0) t^2 - \frac{1}{3} (\vec{\Omega} \times \vec{g}) t^3 .\end{aligned}\quad (10.7)$$

Solución al problema 5

Definamos los ejes del sistema referencia solidario con la Tierra tal como se muestra en la figura adjunta. El proyectil se dispara desde P en la dirección este-oeste con un ángulo de elevación α , luego la velocidad inicial del proyectil viene dada por

$$\vec{v}_0 = -v_0 \cos \alpha \hat{y} + v_0 \sin \alpha \hat{x} .$$

Los vectores correspondientes a la aceleración de gravedad (local) y la velocidad angular de la Tierra vienen dados por

$$\vec{g} = -g \hat{g}$$

y

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z} .$$

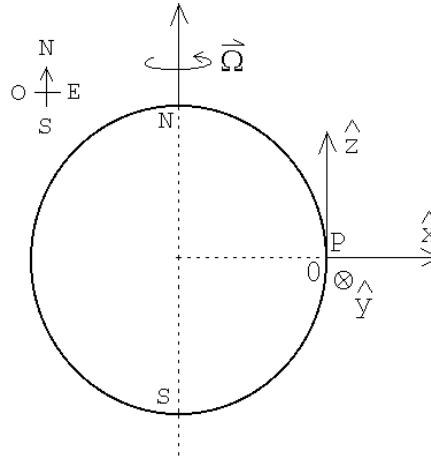


Figura 10.9

Reemplazando estas relaciones en (10.7) se obtiene la posición del proyectil a medida que transcurre el tiempo (medido desde el lugar de lanzamiento):

$$\vec{r}(t) = -v_0 t \cos \alpha \hat{y} + v_0 t \sin \alpha \hat{x} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{x} + \frac{1}{3} g t^3 \Omega \hat{y} - v_0 t^2 \Omega \cos \alpha \hat{x} - v_0 t^2 \Omega \sin \alpha \hat{y} .$$

Sea t^* el instante en que el proyectil vuelve a caer sobre la Tierra. En ese instante se tiene que

$$\vec{r}(t^*) = -D \hat{y} ,$$

donde D es el alcance del proyectil. Evaluando $\vec{r}(t)$ en el instante t^* e igualando el resultado con la expresión anterior, se puede despejar t^* y D obteniéndose

$$t^* = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g + 2 \Omega v_0 \sin \alpha} \simeq \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha - \Omega \left(\frac{2 v_0}{g} \right)^2 \sin \alpha \cos \alpha + o(\Omega^2) .$$

(Estamos despreciando todas las correcciones del orden Ω^2). Para D se obtiene la expresión

$$D = v_0 t^* \cos \alpha - \frac{1}{3} t^{*3} g \Omega + v_0 t^{*2} \Omega \sin \alpha .$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión para t^* se encuentra (despreciando nuevamente todos los términos de orden $o(\Omega^2)$) que

$$D = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha + 4 \frac{v_0^3 \Omega}{g^2} \sin \alpha \left(\frac{1}{3} \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \right) .$$

El primer término del lado derecho de la última ecuación es el alcance del proyectil si se ignora la fuerza de Coriolis; el segundo término es la corrección (a primer orden en Ω), que sufre el alcance debido a la rotación terrestre.

Solución al problema 9

a) La posición en función del tiempo de un péndulo cónico de largo ℓ que recorre un círculo de radio R viene dada por

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \hat{x} + R \sin(\omega t) \hat{y} ,$$

con $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Esta solución corresponde a un péndulo cónico que gira en la dirección contraria al reloj. Una solución que gira en el mismo sentido que el reloj viene dada por

$$\vec{r}_2(t) = R \cos(\omega t) \hat{x} + R \sin(-\omega t) \hat{y} .$$

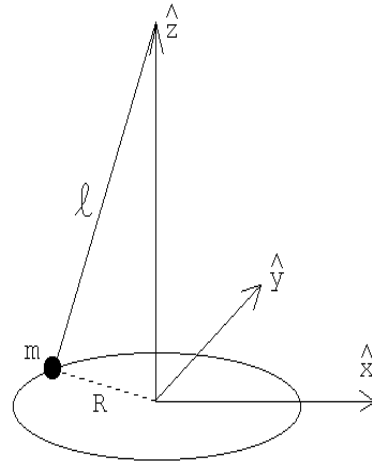


Figura 10.10

Al ignorar la rotación de la Tierra (es decir, al despreciar la fuerza de Coriolis) las frecuencias angulares para ambos sentidos es la misma.

Al sumar las dos soluciones se obtiene la proyección sobre el plano $x - y$ de la solución correspondiente a un péndulo lineal. En efecto:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = 2R \cos(\omega t) \hat{x} .$$

El lado derecho corresponde al movimiento de un oscilador a lo largo del eje $\hat{x}$ con amplitud $2R$ (esto es, la proyección de la posición del péndulo sobre el plano horizontal).

b) Al incluir el efecto de la fuerza de Coriolis, los vectores posición (en el plano $x - y$) de los péndulos cónicos, a medida que transcurre el tiempo, vienen dados por

$$\vec{r}_1(t) = R \cos(\omega_1 t) \hat{x} + R \sin(\omega_1 t) \hat{y} ,$$

y

$$\vec{r}_2(t) = R \cos(\omega_2 t) \hat{x} + R \sin(\omega_2 t) \hat{y} ,$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda$$

y

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{g}{\ell} + (\Omega \sin \lambda)^2} - \Omega \sin \lambda ,$$

donde λ es la latitud del lugar en que se encuentra el péndulo (ver problema 10.8). Al sumar las dos soluciones y usar las relaciones

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right)$$

y

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right)$$

se encuentra

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = 2R \cos\left(\sqrt{\Omega^2 \sin^2 \lambda + \frac{g}{\ell}} t\right) \cdot [\cos(\Omega t \sin \lambda) \hat{x} - \sin(\Omega t \sin \lambda) \hat{y}] .$$

La expresión delante del paréntesis cuadrado corresponde a un movimiento oscilatorio de amplitud $2R$ y con esencialmente la frecuencia $\sqrt{g/\ell}$. El término en paréntesis cuadrado es un vector unitario que indica la dirección de oscilación. Observe, sin embargo, que ese vector unitario rota lentamente en el plano $x - y$ a medida que transcurre el tiempo. O sea, la dirección de oscilación de este oscilador (el plano de oscilación del péndulo) rotará a medida que avanza el tiempo, siendo la velocidad angular de rotación de este movimiento

$$\omega_F = \Omega \sin \lambda .$$

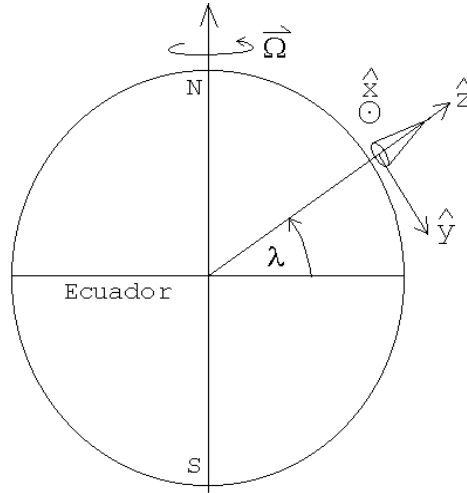


Figura 10.11

Solución al problema 10

Resolvamos el problema usando un sistema solidario a la cuña. Sea $\vec{a} = -a\hat{x}$ la aceleración de la cuña. Al graficar los diagramas de cuerpo libre en el sistema de referencia acelerado, debemos agregar las fuerzas ficticias. Los diagramas de cuerpo libre de la masa m y de la cuña se muestran en la figura siguiente.

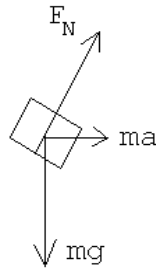


Figura 10.12a

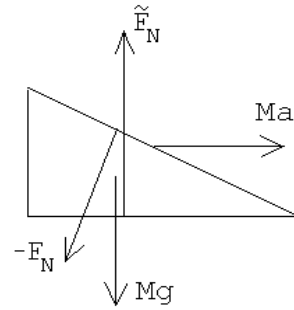


Figura 10.12b

En el sistema solidario a la cuña, la aceleración de la masa m es $\vec{a}_m = a_x\hat{x} - a_z\hat{z}$, donde

$$\frac{a_z}{a_x} = \tan \alpha, \quad (10.8)$$

y la aceleración de la cuña M es nula. De los diagramas de cuerpo libre se deducen las ecuaciones de movimiento

$$-mg\hat{z} + F_N \cos \alpha \hat{z} + F_N \sin \alpha \hat{x} + ma \hat{x} = m\vec{a}_m$$

y

$$-F_N \sin \alpha \hat{x} + Ma \hat{x} - Mg\hat{z} + \tilde{F}_N \hat{z} = 0.$$

De la segunda ecuación se encuentra que $F_N = Ma/\sin \alpha$, y de la primera se obtienen las componentes a_z y a_x de la aceleración de m :

$$a_z = mg - F_N \cos \alpha$$

$$a_x = ma + F_N \sin \alpha.$$

Usando estas relaciones y (10.8), se encuentra

$$\tan \alpha = \frac{mg - F_N \cos \alpha}{ma + F_N \sin \alpha},$$

de donde, finalmente,

$$a = \frac{mg}{M \cotg \alpha + (m + M) \tan \alpha}.$$