INICIACIÓN MATEMÁTICA.

Decanato de Ciencias y Tecnología

2007

Bracamonte Mireya
Ereú Jurancy
Mendoza Malón
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

Notas del curso de *Iniciación Matemática*
Diseñado para Estudiantes de Nuevo Ingreso
del Decanato de Ciencias y Tecnología

Departamento de Matemáticas,
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.
2007

Ere Jurancy
Mendoza Maln
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

INTRODUCCIÓN

No podemos pasar por alto las deficiencias que presentan nuestros estudiantes, cuando llegan a la Universidad, tanto en conceptos elementales como en el manejo de elementos de álgebra elemental.

Para todos aquellos que de una u otra forma nos preocupamos por tales deficiencias, debemos tener presente que los factores responsables de ello son diversos, sin embargo, en miras de lograr una “uniformidad”, se ha desarrollado un curso `Introducción al Cálculo` que pretende ayudar al estudiante que va a ingresar al Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad “Centroccidental Lisandro Alvarado”, a que su desenvolvimiento académico en su primer semestre, sea lo mejor posible, haciéndoles un “recuento” de aquellas definiciones que fueron tratadas en la educación básica y diversificadas, que deberían haber generado las importantes e indispensables destreza que le permitan al estudiante la prosecución de sus estudios.

Es cierto que material de este tipo lo podemos hallar frecuentemente, sin embargo el objetivo principal al escribir estas notas es, además de darles un material accesible para el desarrollo del curso, se pretende dejar una herramienta que el alumno pueda leer, comprender y valorar estando consciente que le ayudará a un acondicionamiento mental que le ayude a enfrentar nuevos retos.

Nadie “aprende matemáticas viendo a otro hacer”, por ello es importante que el estudiante reconozca la importancia que tiene el desarrollo del curso y dedique tiempo a leer, comprender, y practicar.

”*Como toda obra humana está al margen de la perfección*“, por ello, se agradecen todas las críticas y sugerencias que nos ayuden a mejorar este material y contribuya al logro del objetivo inicial del curso.

Índice general

Capítulo 1

Álgebra .

Este capítulo está diseñado para ofrecer un breve repaso de algunos términos y métodos necesarios en la manipulación matemática.

1.1. El Conjuntos de los Números Reales

Aquí presentamos una visión acerca del conjunto de los números reales, algunos subconjuntos importantes, las operaciones que en este conjunto se definen y las propiedades que éstas poseen.

Para ello, comencemos recordando algunos subconjuntos importantes de números reales, quizás en el orden en que los hemos conocido en nuestra educación formal.

El conjunto de los Números Naturales o Enteros positivos. Son todos aquellos que inicialmente conocemos y nos permiten contar, con ellos aprendimos a realizar operaciones aritméticas como sumas y multiplicación. Además de ello podíamos restar y dividir, sólo que con algunas restricciones.
¿Recuerdas alguna?

Y generalmente escribimos:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Podemos notar que este conjunto tiene un **primer elemento**, a saber, el uno, pero no existe un último elemento, por ello decimos que que es un conjunto "Infinito".

Además, de ellos, conocemos un número que juega un papel muy importante, ¿ Recuerdas cuál es?, exacto!, el **cero**, y lo conocemos como **elemento neutro** de la suma de números naturales.

En algunos casos acostumbramos a escribir:

$$\mathbb{N}^* := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

El conjunto de Números Enteros: Este conjunto es "más grande" que el anterior, y nos permite hallar un número que sumado a cuatro sea igual a uno, por ejemplo.

Recordemos que,

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Nótese que todos los números naturales están en este nuevo conjunto, lo cual se expresa simbólicamente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Además, El conjunto de los números enteros no tiene un primer elemento ni un último elemento, por lo que decimos que también es infinito.

El conjunto de Números Racionales: Si consideramos ahora dos números enteros a y b, $\frac{a}{b} = a \div b$ denota el resultado de dividir a entre b.

Acá es importante recordar, que la división por cero no está definida, no tiene sentido matemático.

Así, el conjunto de números racionales se define como:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$$

En la expresión $\frac{p}{q}$ a p se le llama **numerador**, q **denominador** y $\frac{p}{q}$ **fracción**.

Nótese:

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $\frac{a}{1} = a \div 1 = a$, lo cual nos garantiza que `todo número entero es un número racional`, y escribimos: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.
2. Al dividir podemos tener los siguientes casos:

Números Racionales

- ***Entero***
- ***Número con expresión Decimal.***
  - ***Expresión Decimal finita***
  - ***Expresión decimal Infinita***
    - ***Infinita Periódica pura***
    - ***Infinita periódica Mixta.***

Una división exacta: $\dfrac{-10}{5} = -10 \div 5 = -2$, en este caso obtenemos un entero.

Un número con expresión decimal: Acá pueden suceder, a su vez:

`Una expresión decimal finita:` $\dfrac{1}{5} = 0,2$

`Una expresión decimal infinita periódica pura:` Como sucede en el caso de

$$\frac{1}{3} = 0,3333333333.... = 0,\widehat{3}$$

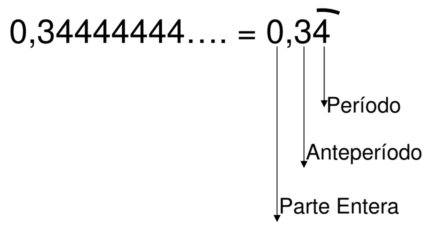
y

$$\frac{2}{7} = 2 \div 7 = 0,285714285714285714285714285714... = 0,\widehat{285714}$$

`Una expresión decimal infinita periódica mixta:` En este caso tenemos

$$\frac{31}{90} = 31 \div 90 = 0,34444444..... = 0.3\widehat{4}$$

En general, todo número racional, no entero, se puede representar por una expansión decimal periódica finita o por una expansión decimal infinita.



Llamaremos **periodo** a la cifra o grupo de cifras que se repiten y se denota con un arco, mientras que a la cifra o grupo de cifras (decimales) que no se repiten lo llamaremos **ante-período**.

Ahora bien, hemos visto que dada una fracción podemos hallar su expresión decimal. ¿Dada una expresión decimal, podemos hallar la fracción que la genera? En educación básica la conocimos como **fracción generatriz** ¿La recuerdas?

Incluir el cálculo de la fracción generatriz

El conjunto de Números Irracionales: Hasta ahora, tenemos que todo número que se representa por una expansión decimal periódica (finita o infinita) es un número racional, pero cabe hacerse dos preguntas: ¿Existen expansiones decimales que no sean periódicas?, y si existen, ¿son números racionales?

La respuesta de la primera pregunta es afirmativa, como ejemplo, podemos construir el número: $0,1101001000100001000001000000....$ `Intenta construir alguno`.

Los números que se pueden representar por expansiones decimales infinitas no periódicas reciben el nombre de **números irracionales**. A este conjunto se le denota por $\mathbb{I}$.

Observación 1.1 *Por la definición de número racional y la de número irracional se tiene que no existen números que sean racionales e irracionales a la vez, simbólicamente esto se indica de la siguiente manera:* $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

El conjunto de Números Reales: Luego, la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los **números reales** y se denota con el símbolo $\mathbb{R}$, simbólicamente escribimos: $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

1.2. Propiedades de los números reales.

Al combinar los números reales utilizando las operaciones de suma y multiplicación, utilizamos las siguientes propiedades:

En cada uno de los casos, a, b y c son números reales. ($a, b, c \in \mathbb{R}$.)

Propiedad Conmutativa

$$a + b = b + a, \qquad a.b = b.a$$

Esto es, cuando sumamos o multiplicamos, el orden no altera los resultados. Por lo tanto, es igual que sumemos $2 + 5$ que $5 + 2$, o que multipliquemos 4.11 que 11.4.

Propiedad Asociativa.

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a.(b.c) = (a.b).c$$

Es decir, al realizar la adición, o multiplicación, de tres números reales, se pueden agrupar en cualquier orden para obtener el resultado.

Inverso Aditivo Para cada número real a, existe un número real único, denotado por $-a$, tal que

$$\boxed{\text{a+(-a)} = 0.}$$

El número $-a$ recibe el nombre de **Inverso Aditivo**.

Puesto que $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6; pero ello también implica que el inverso aditivo de -6 es 6.

Recordar 1.1 *$-a$ es una notación para representar el recíproco, o inverso aditivo de a, esto no significa que $-a$ tiene que ser un número negativo, como podemos observar en el ejemplo anterior.*

Inverso multiplicativo. Para todo número real $a \neq 0$, existe un único número real , denotado por a^{-1}, tal que $a.a^{-1} = 1$

Al número a^{-1} se le llama **Inverso Multiplicativo** de a.

Así, todos los números, excepto el 0, tienen un inverso multiplicativo.

a^{-1} se puede representar como $\dfrac{1}{a}$, y también se le denomina ***recíproco*** de a.

Como ejemplo, el inverso multiplicativo de -3 es $\dfrac{-1}{3}$, dado que $-3.\dfrac{-1}{3} = 1$. Además, $\dfrac{-1}{3}$ es el inverso multiplicativo de -3.

Recordar 1.2 *El recíproco de* 0 *no está definido*

Propiedades Distributivas.

$$a.(b+c) = a.b + a.c \qquad\qquad (b+c).a = b.a + c.a$$

Por ejemplo,

$$2(3+4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14, \qquad x(z+4) = x(z) + x(4) = xz + 4x.$$

$$(2+3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20, \qquad 4(a+b) = 4a + 4b$$

La propiedad distributiva se puede extender a la forma

$$a.(b+c+d) = a.b + a.c + a.d$$

De hecho, puede ampliarse a sumas que implican cualquier número finito de términos.

Definición 1.1 *La* ***Sustracción*** *o* ***Resta*** *se define formalmente mediante la propiedad del inverso aditivo*

$$\boxed{a\text{-}b = a + (\text{-}b)}$$

Así $6 - 8 = 6 + (-8)$.

Definición 1.2 *De manera similar, se define la* ***División*** *en términos de la multiplicación. Si* $b \neq 0$*, entonces*

$$\boxed{a \div b = \frac{a}{b} = a.b^{-1} = a.\frac{1}{b}}$$

Observación 1.2 *En ocasiones* $a \div b$ *o* $\frac{a}{b}$ *se le llama razón de* a *a* b*.*

Tenemos que la suma y producto números reales obedecen las siguientes reglas:

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$

2. $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)=a\cdot(-b)$

3. $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

4. $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$

5. $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$

6. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Los siguientes ejemplos muestran algunas operaciones que implican las propiedades anteriores:

Calculemos en cada caso la suma que se indica:

1. $-\dfrac{12}{3}+5=-\dfrac{12}{3}+\dfrac{5}{1}=\dfrac{-12+15}{3}=\dfrac{3}{3}=1$

2. $-7+\dfrac{-4}{5}=\dfrac{-7}{1}+\dfrac{-4}{5}=\dfrac{-35+(-4)}{5}=\dfrac{-39}{5}=-\dfrac{39}{5}$

3. $-2-\dfrac{11}{3}+\dfrac{4}{7}=\dfrac{-2\cdot 21-7\cdot 11+3\cdot 4}{21}=\dfrac{-42-77+12}{21}=\dfrac{-109}{21}=-\dfrac{109}{21}$

Ejemplo 1.1

1. *$x(y-3z+2w)=(y-3z+2w)x$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.*

2. *Por la propiedad asociativa de la multiplicación, $3(4\cdot 5)=(3\cdot 4)5$. Así, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es igual al resultado de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En uno u otro caso el resultado es 60.*

3. *Por la definición de resta, $2-\sqrt{2}=2+(-\sqrt{2})$. Sin embargo, mediante la propiedad conmutativa de la adición, $2+(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}+2$. Así, por la propiedad transitiva, $2-\sqrt{2}=-\sqrt{2}+2$.*

4. $$\begin{aligned}(8+x)\ -\ y &= (8+x)+(-y) && \textit{(por la definición de sustracción)}\\ &= 8+[x+(-y)] && \textit{(por la propiedad asociativa)}\\ &= 8+(x-y) && \textit{(por la definición de sustracción).}\end{aligned}$$

   Así, mediante la propiedad transitiva,

   $$(8+x)-y=8+(x-y).$$

5. *Mediante la definición de división,*

   $$\frac{ab}{c}=(ab)\cdot\frac{1}{c}\quad \textit{para } c\neq 0.$$

Pero, por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a\left(b \cdot \frac{1}{c}\right).$$

Sin embargo, mediante la definición de división, $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$. *En consecuencia,*

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right).$$

También se puede demostrar que $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b$.

Ejemplo 1.2

- *Note que* $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

  Mediante la propiedad distributiva,

  $$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8).$$

  luego, por la propiedad asociativa de la multiplicación,

  $$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \textit{de manera similar}, 3(2y) = 6y.$$

  Por tanto

  $$3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24.$$

- *Note que* $x(y - z) = xy - xz$.

  Mediante la definición de sustracción y de la propiedad distributiva,

  $$\begin{aligned} x(y - z) &= x[y + (-z)] \\ &= xy + x(-z). \end{aligned}$$

  Como $-z = (-1)z$, *se tiene que* $x(-z) = x[(-1)z]$.

  Ahora, por las propiedades asociativa y conmutativa,

  $$x[(-1)z] = [x(-1)]z = [(-1)x]z = (-1)(xz).$$

  Por consiguiente,

$$\begin{aligned} x(y-z) &= xy + x(-z) \\ &= xy + (-1)(xz) \\ &= xy + [-(xz)]. \end{aligned}$$

Nuevamente, por definición de sustracción, tendremos el resultado deseado, a saber, $x(y-z) = xy - xz$.

- *Si* $c \neq 0$*, entonces* $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$.

  En efecto, por la definición de división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b\frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

  Es importante observar que $\dfrac{a}{b+c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$*. Como en efecto podemos observar en el siguiente ejemplo*

$$\frac{3}{2+1} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{1}.$$

Enseguida se listan otras importantes propiedades de los números reales que deben estudiarse con cuidado.

La capacidad de manipular números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico.

Todos los denominadores son diferentes de cero.

Propiedad	**Ejemplo**
1. $a - b = a + (-b)$.	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5$.
2. $a - (-b) = a + b$.	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9$.
3. $-a = (-1)(a)$.	$-7 = (-1)(7)$.
4. $a(b + c) = ab + ac$.	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54$.
5. $a(b - c) = ab - ac$.	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30$.
6. $-(a + b) = -a - b$.	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9$.
7. $-(a - b) = -a + b$.	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5$.
8. $-(-a) = a$.	$-(-2) = 2$.
9. $a(0) = (-a)0 = 0$.	$2(0) = (-2)0 = 0$.
10. $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$.	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7)$.
11. $(-a)(-b) = ab$.	$(-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14$.
12. $\frac{a}{1} = a$.	$\frac{7}{1} = 7, \frac{-2}{1} = -2$.
13. $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$.	$\frac{2}{7} = 2\left(\frac{1}{7}\right)$.
14. $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$.	$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7}$.
15. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.	$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$.
16. $\frac{0}{a} = 0$	$\frac{0}{7} = 0$.
17. $\frac{a}{a} = 1$	$\frac{2}{2} = 1, \frac{-5}{-5} = 1$.

18. $a\dfrac{b}{a} = b.$ $\qquad 2\dfrac{2}{7} = 7.$

19. $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ $\qquad 2\dfrac{1}{2} = 1.$

20. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}.$ $\qquad \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}.$

21. $\dfrac{ab}{c} = \dfrac{a}{c}b = a\dfrac{b}{c}.$ $\qquad \dfrac{2 \cdot 7}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \dfrac{7}{3}.$

22. $\dfrac{a}{bc} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}\right) = \left(\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{a}{c}\right).$ $\qquad \dfrac{2}{3 \cdot 7} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{7}.$

23. $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{c}\right) = \dfrac{ac}{bc}.$ $\qquad \dfrac{2}{7} = \left(\dfrac{2}{7}\right)\left(\dfrac{5}{5}\right) = \dfrac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}.$

24. $\dfrac{a}{b(-c)} = \dfrac{a}{(-b)(c)} = \dfrac{-a}{bc} = \dfrac{-a}{(-b)(-c)} = -\dfrac{a}{bc}.$

$\dfrac{2}{3(-5)} = \dfrac{2}{(-3)(5)} = \dfrac{-2}{3(5)} = \dfrac{-2}{(-3)(-5)} = -\dfrac{2}{3(5)} = -\dfrac{2}{15}.$

25. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}.$ $\qquad \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{9} = \dfrac{2+3}{9} = \dfrac{5}{9}.$

26. $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}.$ $\qquad \dfrac{2}{9} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{2-3}{9} = \dfrac{-1}{9}.$

27. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}.$ $\qquad \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{22}{15}.$

28. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}.$ $\qquad \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{15}.$

29. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}.$ $\qquad \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{21}.$

30. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac}{b}.$ $\qquad \dfrac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \dfrac{3}{5} = \dfrac{2 \cdot 5}{3} = \dfrac{10}{3}.$

31. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{bc}.$ $\qquad \dfrac{\frac{2}{3}}{5} = \dfrac{2}{3} \div 5 = \dfrac{2}{3 \cdot 5} = \dfrac{2}{15}.$

Ere Jurancy
Mendoza Maln
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

Para finalizar la sección sólo queda por recordar que, no sólo debemos estar consciente de los aspectos "manipulativos" de las propiedades de los números reales, también se debe conocer y estar familiarizado con la terminología aplicada.

Aún cuando todo esto lo sabemos de una forma u otra, la idea es que las tengamos presentes e interpretemos de forma correcta para usarlas como herramientas al abordar un problema posteriormente.

Ejercicios. 1.1

1. *Realiza cada una de la operaciones que se indican.*

   a) $0,86 \div 3.2$

   b) $(-0,\widehat{7}) \div \dfrac{3}{5}$

   c) $\dfrac{7}{2} \div 0,\widehat{4}$

   d) $\dfrac{5}{4} + \dfrac{24}{5}$

   e) $\dfrac{8}{7} \cdot \dfrac{21}{4}$

   f) $\dfrac{23}{5} + \dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{30}$

   g) $\dfrac{8}{3} + \dfrac{2}{7} - \left(\dfrac{3}{4} - 4\right) + 6 - \dfrac{1}{3} - \left(9 + \dfrac{5}{7}\right)$

   h) $\dfrac{8}{3} + \dfrac{2}{7} - \left(\dfrac{3}{4} - 4\right) + 6 - \dfrac{1}{3} - \left(9 + \dfrac{5}{7}\right)$

   i) $0.243 \cdot \frac{3}{7}$

   j) $\dfrac{3}{8} \cdot 0.742 \cdot 3.57$

   k) $(-0.485) \cdot (-4587)$

   l) $\sqrt{3} \cdot 3.8$

2. *Exprese cada una de las siguientes expresiones sin paréntesis.*

   a) $2(a+b)$

   b) $5(3x)$

   c) $\dfrac{2}{3}(-4x)$

   d) $-\dfrac{3}{5}(3x+5)$

   e) $3a(b+c+3)$

   f) $\dfrac{-6}{5}(10x)$

3. *Una hoja de una libro mide* $0.0\widehat{15}$ *cm. de espesor. ¿ Cuál será el grosor de un libro de 524 páginas?*

4. *Un libro de 254 páginas tiene un grosor de 1,9 cm. ¿ Cuál es el espesor de una hoja?*

5. *En cada uno de los siguientes casos determine, justiticadamente, si las proposiciones dadas son verdaderas o falsas.*

- *El recíproco de* $\frac{2}{5}$ *e* $\frac{5}{2}$.
- *El recíproco de* $\frac{2}{5}$ *es* $\frac{5}{2}$.
- *El inverso aditivo de* 5 *es* $\frac{1}{5}$.
- $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4)$.
- $-x + y = y - x$.
- $(x + 2) \cdot (4) = 4 \cdot x + 8$.
- $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$.
- $3. \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3.x}{4}$.
- $x + (y + 5) = (x + y) + (x + 5)$.
- $8 \cdot (9x) = 72 \cdot x$.

6. *Simplificar, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.*

- $-2 + (-4)$.
- $-6 + 2$.
- $6 + (-4)$.
- $7 - (-4)$
- $-7 - (-4)$
- $-8 - (-6)$
- $(-2)(9)$.
- $7(-9)$.
- $(-2)(-12)$.
- $-1(6)$.
- $-(-6 + x)$
- $-7(x)$
- $-2 \div (-4)$.
- $8\left(\frac{1}{11}\right)$.
- $\frac{-5x}{7y}$
- $\frac{\frac{6}{x}}{y}$
- $\frac{\frac{x}{6}}{y}$.

7. *A continuación, especifique las propiedades de lo números reales que se utiliza.*

- $2x + y = y + 2x$
- $c(a + b) = (a + b)c$
- $x + (y + 5z) = (x + y) + 5z$
- $(z + w)2 = z2 + w2$
- $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$
- $a(x + y + z) = ax + ay + az$
- $2 \cdot (x + y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y$.
- $(x + 5) + y = y + (x + 5)$.
- $2 \cdot (3y) = (2 \cdot 3) \cdot y$.
- $\frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.
- $2 \cdot (x - y) = (x - y) \cdot 2$.
- $x + (x + y) = (x + x) + y$.
- $8 - y = 8 + (-y)$.
- $5 \cdot (4 + 7) = 5 \cdot (7 + 4)$.
- $(7 + x) \cdot y = 7 \cdot y + x \cdot y$.
- $(-1) \cdot [-3 + 4] = (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot (4)$.

8. *Verifique que cada uno de los planteamientos son ciertos utilizando las propiedades de los números reales.*

a) $5a(x+3) = 5ax + 15a$.

b) $(2-x) + y = 2 + (y-x)$.

c) $(x-y)(2) = 2x - 2y$.

d) $2[27 + (x+y)] = 2[(y+27) + x]$.

e) $x[(2y+1)+3] = 2xy + 4x$.

f) $(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1$.

1.3. Intervalos.

Ya hemos utilizado alguna notación de conjuntos, sin embargo en el análisis que sigue, es necesario que utilicemos una notación adicional de conjuntos, la cual recordamos a continuación.

Un conjunto, lo entenderemos como, una colección de objetos, conocidos como los elementos del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $\in$ significa que a es un elemento de S y $\notin$ significa que b no es un elemento de S. Por ejemplo, $-3 \in \mathbb{Z}$ pero $\pi \notin \mathbb{Z}$. Algunos conjuntos se pueden escribir listando sus elementos en llaves. Por ejemplo, el conjunto A formado por todos los enteros positivos pares menores que 7 se puede escribir como

$$\{2, 4, 6\}.$$

También podemos escribir A en notación constructiva de conjunto de la forma

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par y } 0 < x < 7\},$$

El cual se lee " A es el conjunto de todas las números enteros x tal que x sea par y $0 < x < 7$".

Si S y T son conjuntos, entonces su unión $S \cup T$ es el conjunto construido por todos los elementos que están en S o en T (o en ambos). La Intersección de S y T es el conjunto $S \cap T$ formado por todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras $S \cap T$ es la parte común de S y T. El conjunto Vacío denotado como $\emptyset$ es el conjunto que no tiene ningún elementos.

Ejemplo 1.3 *Si* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$ *y* $V = \{6, 7, 8\}$, *entonces*

- $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $S \cap T = \{4, 5\}$
- $S \cap V = \emptyset$

Otros subconjuntos importantes de números reales son los intervalos.

Definición 1.3 *Sean a y b números reales tales que $a < b$. Tendremos los siguientes intervalos*

Intervalos Abiertos. *Un intervalo abierto desde a hasta b está formado por todos los números reales entre a y b, no incluyendo los puntos extremos a y b y se denota mediante (a, b). Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir*

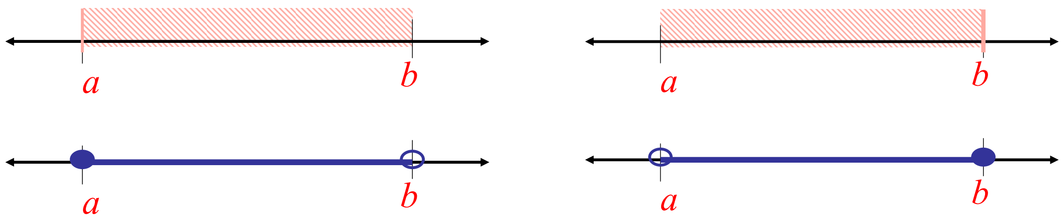
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Intervalos Cerrados. *Un intervalo cerrado desde a hasta b está formado por todos los números reales entre a y b incluyendo los puntos extremos a y b y se denota mediante $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Intervalos Semicerrados o Semiabierto. *Un intervalo de este tipo, es aquel conjunto de número reales desde a hasta b incluyendo sólo uno de los puntos extremos a o b, que pueden ser:*

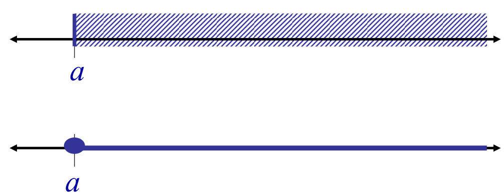
1. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$



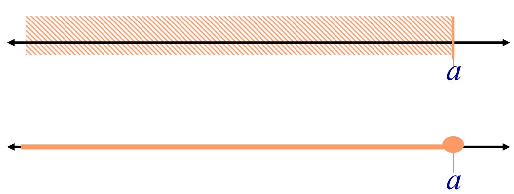
Intervalos infinitos. *En este caso consideramos*

1. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

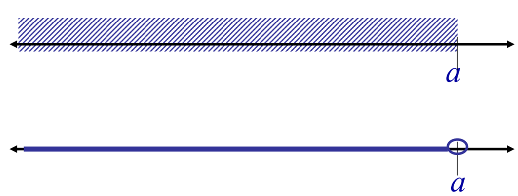
2. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



3. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

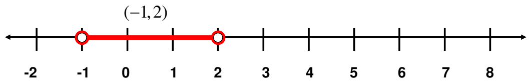


4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

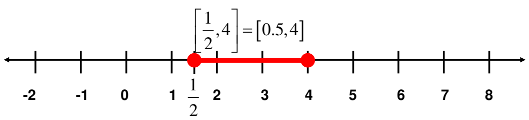


Ejemplo 1.4 *Graficando los intervalos*

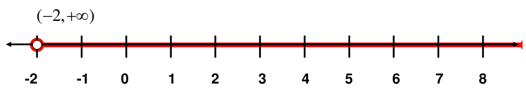
1. $(-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$



2. $[\frac{1}{2}, 4] = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x \leq 4\}$

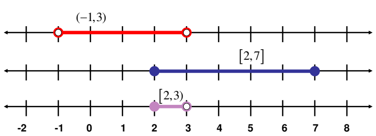


3. $(-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$

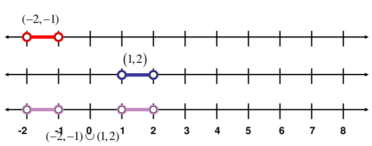


Ejemplo 1.5 *Grafique el resultado de cada una de las siguientes operaciones.*

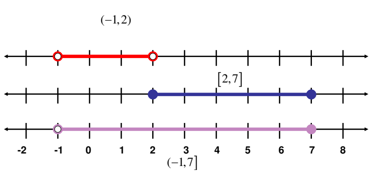
1. $(-1, 3) \cap [2, 7]$



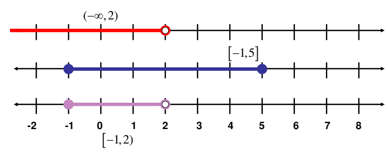
2. $(-2, -1) \cup (1, 2)$



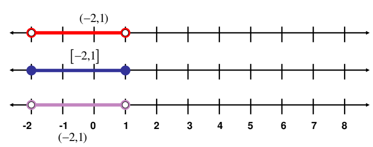
3. $(-1, 2) \cup [2, 7]$



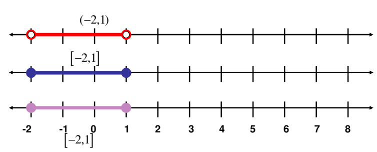
4. $(-\infty, 2) \cap [-1, 5]$



5. $(-2, 1) \cap [-2, 1]$



6. $(-2, 1) \cup [-2, 1]$



Definición 1.4 *Una desigualdad entre dos expresiones algebraica donde al menos una de ellas involucra variables, recibe el nombre de inecuación.*

Así, por ejemplos, tenemos:

$$x + 2 \geq 5 \qquad \frac{x+y}{x-y} > 1 \qquad \sqrt{5z - 3} \leq 4$$

$$xy + z < 4 + x$$

Observación 1.3 *Al igual que en las ecuaciones, en una inecuación las variables involucradas reciben el nombre de **incógnitas**.*

En una inecuación con una incógnita, cualquier número real que esté contenido en el dominio de las incógnitas, y que al sustituirse por la incógnita en la inecuación hace que la desigualdad correspondiente sea verdadera, es una solución de la inecuación.

Definición 1.5 *En una inecuación con una incógnita, cualquier número real que esté contenido en el dominio de las incógnitas, y que al sustituirse por la incógnita en la inecuación hace que la desigualdad correspondiente sea verdadera, es una solución de la inecuación.*

Como ejemplo tenemos que: En $x + 2 > 3$; si se sustituye x por 5 , se obtiene una desigualdad verdadera: $5+3 > 3$; por lo 5 que es una solución de la inecuación $x+2 > 3$.

Además, para la inecuación $\sqrt{x+2} < 2$; si se sustituye x por 7, se obtiene una desigualdad falsa:$\sqrt{7+2} < 2$; por lo que 7 no es una solución de la inecuación $\sqrt{x+2} < 2$.

Propiedades.

Sean a, b, c y d números reales, tendremos:

A_1 Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

A_2 Si c es un número real cualquiera y $a \leq b$ entonces:

$$a + c \leq b + c \quad \text{y} \quad a - c \leq b - c$$

A_3 Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$

A_4 Si $a \leq b$ y $c \neq 0$ entonces:

$$ac \leq bc \quad \text{si} \quad c > 0 \qquad\qquad\qquad ac \geq bc \quad \text{si} \quad c < 0$$

Así por ejemplo, si tenemos la desigualdad $6x - 2 \leq 9x + 2$ obtenemos las siguientes desigualdades equivalentes:

$$6x \leq 9x + 4 \qquad\qquad 3x - 1 \leq \frac{9}{2}x + 1 \qquad -2x + \frac{2}{3} \geq -3x - \frac{2}{3}$$

En el primer caso sumando a ambos lados 2, en el segundo multiplicando por $\frac{1}{2}$ y finalmente multiplicando por $-\frac{1}{3}$.

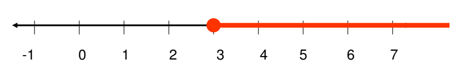
Estas reglas básicas nos van a permitir después resolver inecuaciones.

Si tenemos la desigualdad $-4 + 6x \leq 8x - 10$, podemos aplicar las reglas anteriores de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrcl}
 & -4 + 6x & \leq & 8x - 10 \\
\text{sumamos a ambos lados } 4 & 6x & \leq & 8x - 6 \\
\text{sumamos a ambos lados } -6x & -6x + 6x & \leq & 8x - 6 - 6x \\
 & 0 & \leq & 2x - 6 \\
\text{sumamos a ambos lados } 6 & 6 & \leq & 2x \\
\text{multiplicamos a ambos lados por } \frac{1}{2} & 3 & \leq & x
\end{array}$$

Como a esta última desigualdad la satisfacen todos los números reales mayores o iguales a tres, y es equivalente a la dada inicialmente, ambas deben tener la misma solución, así, la solución es

graficamente tenemos



$$Sol : [3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\},$$

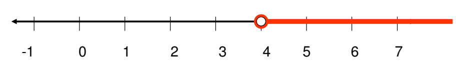
Ejemplo 1.6

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} & > & \dfrac{x+14}{2} - 2 \\
\textit{Multiplicamos por} 12 & 12\left[\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4}\right] & > & 12\left[\dfrac{x+14}{2} - 2\right] \\
 & 4(5x-2) - 3(x-8) & > & 6(x+14) - 24 \\
 & 20x - 8 - 3x + 24 & > & 6x + 84 - 24 \\
 & 17x + 16 & > & 6x + 60 \\
\textit{sumamos a ambos lados } -16-6x & 11x & > & 44 \\
\textit{multiplicamos a ambos lados por} \dfrac{1}{11} & \dfrac{11x}{11} & > & \dfrac{44}{11} \\
 & x & > & 4
\end{array}$$

Así el conjunto solución es;

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 4\} = (4, +\infty),$$

gráficamente tenemos:



1.4. Valor Absoluto y Distancia.

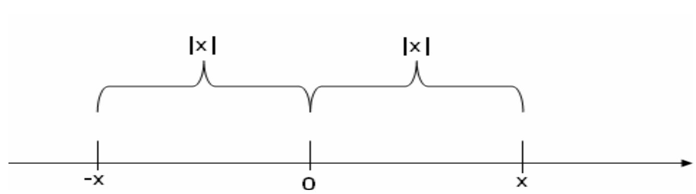
El valor absoluto es un concepto muy importante, por su utilidad, en cálculo y es necesario adquirir habilidad en su uso.

Definición 1.6 *El* ***valor Absoluto*** *de un número real* x*, denotado por* $|x|$*, está definido por*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$, es la distancia desde x hasta 0 en la recta de los números reales.

Interpretación geométrica del Valor Absoluto



1.5. Propiedades del Valor Absoluto.

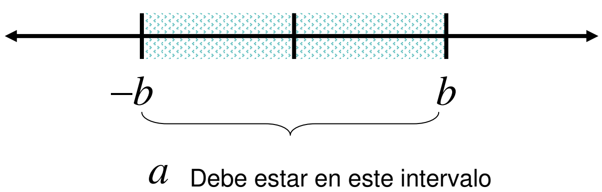
1. $|a| = |-a|$

2. $|a| = |b|$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$

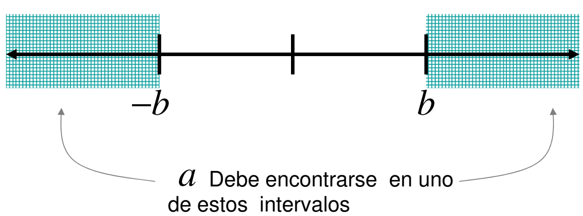
3. $|ab| = |a||b|$

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

5.
   - $|a| \leq b$ donde $b > 0$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$
   - $|a| < b$ donde $b > 0$ si y sólo si $-b < a < b$



6.
   - $|a| \geq b$ donde $b > 0$ si y sólo si $a \geq b$ o $a \leq -b$
   - $|a| > b$ donde $b > 0$ si y sólo si $a > b$ o $a < -b$



7. $|a^n| = |a|^n$

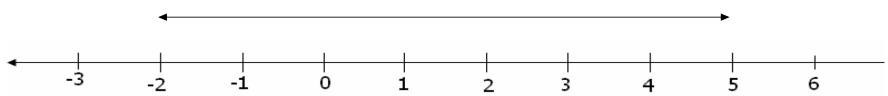
8. $|a + b| \leq |a| + |b|$

9. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Ejemplo 1.7 *Simplificación del valor absoluto en una expresión.*

- $|-4 - x^2| = |-(4 + x^2)| = |4 + x^2| = 4 + x^2$ *(Justifica)*
- $|2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3|$.

Recordar 1.3 *¿ Cuál es la distancia entre los números -2 y 5 en la recta real? A partir de la figura podemos ver que es 7.*



Obtendríamos eso calculando $|5-(-2)| = |5+2| = |7| = 7$, o bien $|-2-5| = |-7| = 7$. Partiendo de esta observación, podemos hacer la siguiente definición.

Definición 1.7 *Si a y b son número reales, entonces la distancia entre los puntos a y b en la recta real es $|b-a|$.*

De las propiedades anteriores tenemos que $|b-a| = |a-b|$.

Ejercicios. 1.2 

1. *Expese cada uno de los intervalos en términos de desigualdades y grafíquelos.*

$$a)(-3,+\infty) \qquad b)(2,8] \qquad c)[2,8)1$$
$$d)\left[-6,\frac{1}{2}\right) \qquad e)[2,+\infty) \qquad f)(-\infty,1)$$

2. *Grafique el conjunto*

$$a)(-2,0)\cup(-1,1) \qquad b)(-2,0)\cap(-1,1) \qquad c)[-4,6]\cap[0,8)$$
$$d)[-4,6)\cup[0,8) \qquad e)(-\infty,-4)\cup(4+\infty) \qquad f)(-\infty,6]\cap(2,10)$$

3. *En cada uno de los siguientes casos escriba tres soluciones de las inecuaciones que se indican:*

   a) $x+3\leq 6$

   b) $\dfrac{1}{x} > 7$

   c) $(x+3)^2 \geq x$

   d) $7-x^2 > 0$

4. *Resuelva las siguientes inecuaciones:*

a) $\dfrac{2x+1}{3} < x - \dfrac{x-3}{2}$

b) $\dfrac{3x-5}{3} - \dfrac{x-1}{2} \leq x + \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2x-1}{9} - \dfrac{x-3}{4} > \dfrac{1}{4}$

d) $5\left(\dfrac{x}{5}+2\right) + 4\left(\dfrac{x}{4}+3\right) < 20 + x$

5. *Evalúe cada una de las expresiones*

$$a)|100| \qquad b)|-73| \qquad c)|-8-(-2)|$$
$$d)|\pi - 10| \qquad e)||-6|-|-4|| \qquad f)\frac{-1}{|-1|}$$
$$g)|2-|-12|| \qquad h)-1-|1-|-1||$$

6. *Utilice las propiedades del Valora absoluto (como en el ejemplo 1.7)para simplificar las expresiones dadas.*

$$a)|3x+9| \qquad b)|4x-16| \qquad c)\left|\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right|$$
$$d)|-2x-10| \qquad e)|-x^2-9| \qquad f)\left|\frac{x-1}{1-x}\right|$$

7. *Determine la distancia entre los números dados.*

$$a)2 \ y \ 17 \qquad b)\frac{7}{15} \ y \ -\frac{1}{21} \qquad c)-3 \ y \ 21$$
$$d)-38 \ y \ -57 \qquad \frac{11}{8} \ y \ -\frac{3}{10} e) \qquad f)-2.6 \ y \ -1.8$$

1.6. Exponentes y Radicales

El producto $x \cdot x \cdot x$ se abrevia como x^3. En general, para un entero positivo n, x^n es la abreviatura del producto de n veces x. Al símbolo n de x^n se le denomina **exponente** y a x se le denomina **base**. En términos más específicos, si n es un entero positivo se tiene que:

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x.}_{n factores}$

2. Si $x \neq 0$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x.}_{n factores}}$

3. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$.

4. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. 0^0 no está definido.

Bracamonte Mireya
Ere Jurancy
Mendoza Maln
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

Ejemplo 1.8 ***a.*** $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

b. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{243}$.

c. $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$.

d. $2^0 = 1, \quad \pi^0 = 1, \quad (-5)^0 = 1$.

e. $x^1 = x$.

1.7. Leyes de los Exponentes.

1. Multiplicación de Potencias. $\boxed{a^m.a^n = a^{m+n}}$

$x^4.x^7 = x^{4+7} = x^{11}$, $y^4.y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3}$

2. División de Potencias. $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

$\frac{y^4}{y^3} = y^{4-3} = y^1 = y$, $\frac{c^3}{c^9} = c^{3-9} = c^{-6}$

3. Potencia de una Potencia. $\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$

$(b^4)^5 = b^{20}$

4. Potencia de un Producto. $\boxed{(a.b)^n = a^n.b^n}$

$(3x)^3 = 3^3.x^3 = 27.x^3$

5. Potencia de un Cociente. $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0}$

$\left(\frac{x}{2}\right)^5 = \frac{x^5}{2^5} = \frac{x^5}{32} \qquad b \neq 0$

6. $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad b \neq 0}$

7. $\boxed{\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}}$

Ejemplo 1.9 *Simplificación de fracciones con exponentes.*

1.

$$\begin{aligned}(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3]\\ &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12})\\ &= 2\cdot 27.a^3a^3b^2b^{12}\\ &= 54a^6b^{14}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x^4}{z}\right) &= \frac{x^3}{y^3}.\frac{(y^2)^4x^4}{z^4}\\ &= \frac{x^3}{y^3}.\frac{y^8x^4}{z^4}\\ &= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z}\\ &= \frac{x^7y^5}{z^4}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{3z^2}\right)^{-2} &= \left(\frac{3z^2}{y}\right)^2\\ &= \frac{3^2(x^2)^2}{y^2}\\ &= \frac{9x^4}{y^2}\end{aligned}$$

Sabemos los que significa 2^n, siempre que n sea un número entero. Para darle significado a una potencia como $2^{\frac{4}{5}}$, es necesario que analicemos los radicales.

Definición 1.8 *a El símbolo $\sqrt{\ }$ significa "raíz cuadrada positiva de". Así,*

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \textit{significa} \quad b^2 = a \ y \ b \geq 0}$$

Dado que $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tienen sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$ y $3 \geq 0$.

La raíz cuadrada son casos particulares de las raíces n-ésimas.

Definición 1.9 *Si n es cualquier entero positivo, entonces la raíz n-ésima principal de a se define como:*

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \textit{signitica} \quad b^n = a}$$

Si n es par, tenemos que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Así,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^4 = 81 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0. \sqrt[8]{-8} = -2 \quad \text{porque} \quad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas, ya que el cuadrado (o potencia par) de cualquier número real es no negativo.

La ecuación $x^5 = 31$ sólo tiene una solución real $\sqrt[5]{31}$.

La ecuación $x^4 = 31$ tiene dos soluciones reales $x = \sqrt[4]{31}$ y $-\sqrt[4]{31}$.

Observe que $\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$ pero $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

1.8. Propiedades de las Raíces n-ésimas.

Propiedad	*Ejemplo*
1. $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.	$\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$.
2. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.	$\dfrac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$.
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$.
4. $\sqrt[n]{x^n} = x$ si n es impar.	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{x^n} = \|x\|$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \|-3\| = 3$

Observación 1.4 *Una observación importante que debemos hacer es: Si tenemos $\sqrt{x}$ donde x es una variable, debemos tener presente para los valores de x que esta expresión tenga sentido, es decir, ¿Qué valores de x me generan $\sqrt{x}$ como un número real?*

Es claro que x debe ser positivo o cero, para que eso suceda.

Ahora bien, ¿Para qué valores de x la expresión $\sqrt{-x}$ es un número real?

Note que si $x = -4$ entonces $\sqrt{-x} = \sqrt{-(-4)} = \sqrt{4} = 2$, de hecho, x debe ser menor igual a cero para que esto suceda.

Así, si deseamos hallar los valores de x para los cuales $\sqrt{1-x} \in \mathbb{R}$, se reduce a resolver la inecuación $1 - x \geq 0$, esto $x \in (-\infty, 1]$.

Ejemplo 1.10

- $\sqrt{20}\sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10$
- $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$
- $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Ejemplo 1.11

1. $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x.x^3} = \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x} = x\sqrt[3]{x}$
2. $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4} = 3\sqrt[4]{(x^2)^4}.\sqrt[4]{|y|} = 3x^2|y|$

Ejemplo 1.12 *Combinación de Radicales.*

1. $10\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} = (10 + 7 - 2)\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{4}$
2. $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$
3. $\sqrt[3]{8a^8} + \sqrt[3]{27a^5} = \sqrt[3]{(8a^6)a^2} + \sqrt[3]{(27a^2)} = 2a^2\sqrt[3]{a^2} + 3a\sqrt[3]{a^2} = a\sqrt[3]{a^2(2a+3)}$.

Exponentes Racionales.

Para definir un exponente racional es necesario utilizar radicales. A fin de darle significado a el símbolo $a^{\frac{1}{n}}$ en una forma consistente con las leyes de los exponentes, tenemos que

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}.n} = a^1 = a.$$

Pero esto, a partir de la definición de raíz n-ésima $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$.

En general, definimos los exponentes racionales como sigue

Definición 1.10 *Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$ expresado en su forma más simplificada, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos*

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

0, de manera equivalente

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Ejemplo 1.13

1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
2. $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$
3. $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$
4. $(125)^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{(125)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{-\frac{4}{3}}$
6. $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{\frac{1}{2}})(3x^{\frac{1}{3}}) = 6x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 6x^{\frac{5}{6}}$
7. $\sqrt{x\sqrt{x}} = (x.x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{4}}$

1.9. Racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción es el procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin el radical en su denominador. Se utiliza el principio fundamental de las fracciones.

En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{z^{n-m}}$ se racionalizará el denominador, ya que (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Lo cual es equivalente a

$$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{n-m}{n}} = a^{\frac{m+n-m}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a.$$

Ejemplo 1.14 *Racionalizar los denominadores.*

1. $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5^{1/2}} = \dfrac{2\cdot 5^{1/2}}{5^{1/2}\cdot 5^{1/2}} = \dfrac{2\cdot 5^{1/2}}{5^1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

2. $$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} &= \frac{2}{\sqrt[6]{3}\sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2\cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6}\cdot 3^{5/6}x^{1/6}}\\ &= \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}\end{aligned}$$

O podemos trabajar como se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.15 1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

3. $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a}}.\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

Los siguientes ejemplos ilustran diversas aplicaciones de las leyes de los exponentes y los radicales.

Ejemplo 1.16 1. *Para eliminar los exponentes negativos en* $\dfrac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$.

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2}\cdot y^3\cdot\frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2}\cdot y^3\cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}.$$

2. *Para simplificar* $\dfrac{x^2y^7}{x^3y^5}$.

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}.$$

3. *Para eliminar los exponentes negativos en* $x^{-1}+y^{-1}$ *y simplificar.*

$$x^{-1}+y^{-1} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}. \qquad (Nota: x^{-1}+y^{-1} \neq \frac{1}{x+y})\ .$$

4. *Simplificando* $x^{3/2}-x^{1/2}$,

$$x^{3/2}-x^{1/2} = x^{1/2}(x-1).$$

5. *Simplificando,* $(x^5y^8)^5$.

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}.$$

6. *Para simplificar* $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$,

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}.$$

7. *Para simplificar* $\left(\dfrac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$.,

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}.$$

8. *Para eliminar los exponentes negativos en* $7x^{-2} + (7x)^{-2}$,

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}.$$

9. *Ahora para, eliminar los exponentes negativos en* $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$, *procedemos*

$$\begin{aligned}(x^{-1} - y^{-1})^{-2} &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} &&= \left(\frac{y-x}{xy}\right)^{-2}\\ &= \left(\frac{xy}{y-x}\right)^{2} &&= \frac{x^2y^2}{(y-x)^2}.\end{aligned}$$

10. *Aplicando la ley distributiva a* $x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5})$, *obtenemos*

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}y^{1/2} + 2x^{8/5}.$$

11. *Si deseamos simplificar* $\dfrac{x^3}{y^2} \div \dfrac{x^6}{y^5}$, *tendremos*

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}.$$

Ejemplo 1.17 1. *Si deseamos simplificar* $\sqrt[4]{48}$, *procedemos*

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}.$$

2. *Podemos reescribir la expresión* $\sqrt{2+5x}$ *de la forma*

$$\sqrt{2+5x} = (2+5x)^{1/2}.$$

3. *Para racionalizar el denominador y simplificar la expresión* $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$*, procedemos*

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5}\cdot 6^{2/3}}{6^{1/3}\cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15}6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}.$$

4. *También podemos simplificar* $\sqrt[3]{x^6y^4}$ *de la forma*

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^6y^4} &= \sqrt[3]{(x^2)^3y^3y} \;=\; \sqrt[3]{(x^2)^3}\cdot\sqrt[3]{y^3}\cdot\sqrt[n]{y}\\ &= x^2y\sqrt[3]{y}.\end{aligned}$$

5. *De forma similar con* $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

6. *Para simplificar* $\sqrt{250}-\sqrt{50}+15\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{250}-\sqrt{50}+15\sqrt{2} &= \sqrt{25\cdot 10}-\sqrt{25\cdot 2}+15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10}-5\sqrt{2}+15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10}+10\sqrt{2}.\end{aligned}$$

7. *Si* x *es un número real, y deseamos simplificar la expresión* $\sqrt{x^2}$*, hacemos*

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es positiva,}\\ -x, & \text{si } x \text{ es negativa,}\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases} = |x|$$

Por tanto $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que

i) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ii) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

iii) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

Ejemplo 1.18 *En cada una de las siguientes expresiones racionalizar el denominador y simplificar el resultado.*

1.

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\
&= \frac{-1(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} \\
&= \frac{-1(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} \\
&= \frac{-1(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1} \\
&= \sqrt{2}-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} &= \frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2} \\
&= \frac{14[(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2]}{(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{5})^3} \\
&= \frac{14[(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2]}{2+5} \\
&= \frac{14[(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2]}{7} \\
&= 2[(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2]
\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} &= \frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}\cdot\frac{2x-3\sqrt{y}}{2x-3\sqrt{y}}\\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{(2x+3\sqrt{y})(2x-3\sqrt{y})}\\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{(2x)^2-(3\sqrt{y})^2}\\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{4x^2-9y}\\
&= \frac{-(4x^2-9y)(2x-3\sqrt{y})}{4x^2-9y}\\
&= -(2x-3\sqrt{y})\\
&= 3\sqrt{y}-2x.
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}} &= \frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}}\cdot\frac{2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2}{2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2}\\
&= \frac{(25-x^2)[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2]}{2^3-(\sqrt[3]{x+3})^3}\\
&= \frac{(25-x^2)[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2]}{8-(x+3)}\\
&= \frac{(25-x^2)[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2]}{8-x-3}\\
&= \frac{(5-x)(5+x)[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2]}{5-x}\\
&= (5+x)[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+(\sqrt[3]{x+3})^2]
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} &= \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}\\
&= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^3}}\\
&= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{1-\sqrt{x}}\\
&= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\\
&= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2}\\
&= \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})}{1-x}\\
&= \frac{(x-1)(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})}{1-x}\\
&= \frac{-(1-x)(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})}{1-x}\\
&= -(x+1)\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})
\end{aligned}
$$

Ejercicios. 1.3 

1. *Determine el conjunto de números reales, para el cual la expresión dada genera un número real.*

   a) $\sqrt{2-x}$ b) $\sqrt[4]{x-\frac{1}{2}}$ c) $\frac{x-2}{x-1}$

Bracamonte Mireya
Ere Jurancy
Mendoza Maln
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

d) $\dfrac{1}{x}$ e) $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{3}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

2. *En cada caso simplificar y expresar todas las respuestas en términos de exponentes positivos*

a) $(2^3)(2^2)$
b) x^6x^9
c) w^4w^8
d) $x^6x^4x^3$.
e) $\dfrac{x^2x^6}{y^7y^{10}}$.
f) $(x^{12})^4$
g) $\dfrac{(x^2)^5}{(y^5)^{10}}$.
h) $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^5$.
i) $(2x^2y^3)^3$
j) $\left(\dfrac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$
k) $\dfrac{x^8}{x^2}$
l) $\left(\dfrac{2x^2}{4x^4}\right)^3$
m) $\dfrac{(x^3)^6}{x(x^3)}$
n) $\dfrac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$

3. *A continuación evalúe las expresiones*

- $\sqrt{25}$.
- $\sqrt[3]{64}$.
- $\sqrt[15]{-32}$.
- $\sqrt{4}$.
- $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}$.
- $(100)^{1/2}$.
- $(64)^{1/3}$.
- $4^{3/2}$.
- $(25)^{-3/2}$.
- $(32)^{-2/5}$.
- $(0.09)^{-1/2}$.
- $(\dfrac{1}{16})^{5/4}$
- $\left(\dfrac{-27}{64}\right)^{2/3}$.

4. *simplificar cada una de las siguientes expresiones*

a) $\sqrt{32}$
b) $\sqrt[3]{24}$
c) $\sqrt[3]{2x^3}$
d) $\sqrt{4x}$.
e) $\sqrt{16x^4}$.
f) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{16}}$
g) $(9z^4)^{1/2}$
h) $(16y^8)^{3/4}$.
i) $\left(\dfrac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$.
j) $\left(\dfrac{1000}{a^9}\right)^{-2/3}$

5. *En cada caso siguiente escribir las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evitar todos los radicales en la forma final. Por ejemplo,* $y^{-1}\sqrt{x} = \dfrac{x^{1/2}}{y}$.

a) $\dfrac{x^3y^{-2}}{z^2}$.
b) $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$.
c) $2x^{-1}x^{-3}$
d) $x + y^{-1}$.
e) $(3t)^{-2}$.
f) $(3-z)^{-4}$.
g) $\sqrt[3]{7s^2}$
h) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.
i) $(x^{-2}y^2)^{-2}$.
j) $\dfrac{x^{-2}y^{-6}z^2}{xy^{-1}}$.
k) $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$.
l) $(\sqrt[5]{xy^{-3}})x^{-1}y^{-2}$.

6. *En cada una de las siguientes casos, expresar las formas exponenciales de modo equivalente utilizando radicales.*

a) $(8x-y)^{4/5}$. c) $x^{-4/5}$. e) $2x^{-2/5}-(2x)^{-2/5}$.

b) $(ab^2c^3)^{3/4}$. d) $2x^{1/2}-(2y)^{1/2}$. f) $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$.

7. *Racionalizar los denominadores.*

a) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{11}}$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{2x}}$.

d) $\dfrac{y}{\sqrt{2y}}$.

e) $2x^{-2/5}-(2x)^{-2/5}$.

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x}}$

g) $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

h) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$.

i) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

j) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{xy^2}}$

k) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

l) $\dfrac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{7}}$

m) $\dfrac{-118}{\sqrt{3}+11}$

n) $\dfrac{2}{2\sqrt{5}+3\sqrt{7}}$

ñ) $\dfrac{1-x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

o) $\dfrac{11-2x}{3-2\sqrt{x+1}}$

p) $\dfrac{x^2-16y}{x+4\sqrt{y}}$

q) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{11}}$

r) $\dfrac{-3}{\sqrt[3]{7}+2}$

8. *Racionalizar los denominadores.*

a) $\dfrac{-26}{3-\sqrt[3]{5}}$

b) $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

c) $\dfrac{16+250x}{2+5\sqrt[3]{x}}$

d) $\dfrac{38x-108}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x+2}}$

e) $\dfrac{x^2-4y^2}{\sqrt{x+2\sqrt{y}}}$

f) $\dfrac{x^3-y}{\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{y}}}$

g) $\dfrac{5a-5b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

h) $\dfrac{3a+2b}{\sqrt[3]{9a^2}-\sqrt[3]{6ab}+\sqrt[3]{4b^2}}$

i) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$

j) $\dfrac{a+b}{2\sqrt[3]{3a+3b}}$

k) $\dfrac{3y-15}{2-\sqrt[3]{3+y}}$

l) $\dfrac{4y+32}{\sqrt[3]{y}+2}$

m) $\dfrac{3x^2-3}{\sqrt[3]{3x^2-5x-2}-\sqrt[3]{1-5x}}$

9. *simplificar. Expresar todas las respuestas en términos de exponentes positivos. Racionalizar el denominador cuando sea necesario para evitar exponentes fraccionarios en el mismo.*

a) $2x^2y^{-3}x^4$.

b) $\dfrac{2}{x^{3/2}y^{1/3}}$.

c) $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}$.

d) $\{[(2x^2)^3]^{-4}\}^{-1}$.

e) $\dfrac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$.

f) $\dfrac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$.

g) $\sqrt[3]{x^2yz^3}\,\sqrt[3]{xy^2}$.

h) $(\sqrt[5]{2})^{10}$.

i) $3^2(27)^{-4/3}$.

j) $(\sqrt[5]{xy^2})^{2/5}$.

k) $(2x^{-1}y^2)^2$.

l) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{x}}$.

m) $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$.

n) $\sqrt{75k^4}$.

ñ) $\dfrac{(x^2y^{-1}z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}$.

o) $\sqrt{6(6)}$.

p) $\dfrac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\dfrac{x^3}{(x^3)^2}\right]^{-2}$.

q) $-\dfrac{8s^{-2}}{2s^3}$.

r) $\sqrt{(-6)(-6)}$.

s) $(x^{-1}y^{-2}\sqrt{z})^4$.

t) $(x^{-1}y^{-2}\sqrt{z})^4$.

u) $(2x^2y \div 3y^3z^{-2})^2$.

1.10. Operaciones con Expresiones Algebraicas

Si se combinan números, representados con símbolos, mediante operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces se denomina al resultado una **expresión algebraica**.

Ejemplo 1.19 ***a.*** $\sqrt[3]{\dfrac{3x^3-5x-2}{10-x}}$ *es una expresión algebraica en la variable x.*

b. $10-3\sqrt{y}+\dfrac{5}{7+y^2}$ *es una expresión algebraica en la variable y.*

c. $\dfrac{(x+y)^3-xy}{y}+2$ *es una expresión algebraica en las variables x y y.*

Definición 1.11 *Se llama valor numérico de una expresión algebraica al número que se obtienes al sustituir cada una de sus variables por el valor que se les halla asignado de antemano, y de efectuar la operación indicada.*

Ejemplo 1.20 *El valor numérico de* $-x^2+3x-4$ *si* $x=-2$, *es* $-(-2)^2+3(-2)-4=-4-6-4=-14$.

Definición 1.12 *Se llama monomio a toda constante o bien, a toda expresión algebraica, en la cual las potencias de las variables son de exponentes enteros positivos y están relacionados únicamente por la multiplicación y además no contiene letras en el denominador.*

Ejemplo 1.21 *Así como ejemplo de monomios tenemos*

- $-6x^7y^2z$
- $\dfrac{\sqrt{2}-7}{2}abc$
- 5

Mientras que las expresiones

- $6+x$
- $z^{\frac{1}{2}}$
- $\dfrac{x+4}{y^3}$

no son monomios.

La suma de monomios semejantes entre sí, es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la suma de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Ejemplo 1.22

- $2x^2+4x^2-3x^2=(2+4-3)x^2=3x^2$
- $-2ax+\dfrac{3}{5}ax+ax=(-2+\dfrac{3}{5}+5)ax=-\dfrac{2}{5}ax$

Observación 1.5 *En general la suma de monomios no semejantes entre sí no es igual a un monomio.*

Ejemplo 1.23

- $$\begin{aligned}12a^2y^2+10ax+3a^2y^2-5ax &= 12a^2y^2+3a^2y^2+10ax-5ax\\ &= (12+3)a^2y^2+(10-5)ax\\ &= 15a^2y^2+5ax\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}4x^2y-5ay+2ya-yx^2 &= 4x^2y-yx^2-5ay+2ya\\ &= (4-1)x^2y+(-5+2)ay\\ &= 3x^2y-3ay\end{aligned}$$

Ejemplo 1.24

$$
\begin{aligned}
(3x^2y-2x+1)+(4x^2y+6x-3) &= 3x^2y-2x+1+4x^2y-2x+1\\
&= 3x^2y+4x^2y-2x+6x+1-3\\
&= (3+4)x^2y+(-2+6)x+(1-3)\\
&= 7x^2y+4x-2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.25

$$
\begin{aligned}
(3x^2y-2x+1)-(4x^2y+6x-3) &= (3x^2y-2x+1)+(-1)(4x^2y+6x-3)\\
&= (3x^2y-2x+1)+(-4x^2y-6x+3)\\
&= 3x^2y-2x+1-4x^2y-6x+3\\
&= 3x^2y-4x^2y-2x-6x+1+3\\
&= (3-4)x^2y+(-2-6)x+1+3\\
&= -x^2y-8x+4.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.26

$$
\begin{aligned}
3\{2x[2x+3]+5[4x^2-(3-4x)]\} &= 3\{2x[2x+3]+5[4x^2-3+4x]\}\\
&= 3\{4x^2+6x+20x^2-15+20x\}\\
&= 3\{24x^2+26x-15\}\\
&= 72x^2+78x-45.
\end{aligned}
$$

Definición 1.13 *El producto de dos o más monomios es igual a un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el producto de los factores literales de los monomios dados.*

Ejemplo 1.27 *1.*

$$(4x^2y^3)\left(\frac{2}{3}x^3y^3z\right)=\frac{8}{3}x^5y^6z$$

2.

$$\left(\frac{-2xy}{3}\right)(\sqrt{3}xy^2)\left(\frac{3}{2}ax^3y\right)=-\sqrt{3}ax^5y^4$$

Definición 1.14 *Una fracción con monomio (o cociente de monomio) está simplificada si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

(i) *Las fracciones formadas por los coeficientes de los monomios involucrados está expresada en su forma más simple.*

(ii) *Las variables que aparecen en el numerador son diferentes de las que aparecen en el denominador y no se repiten.*

(iii) *Las potencias de las variables involucradas tienen exponente positivo.*

Ejemplo 1.28 *1.*

$$\frac{72x^4y^3}{48x^2y^5} = \frac{2^3 3^2 x^4 y^3}{2^4 3 x^2 y^5} = 2^{-1}3x^2y^{-2} = \frac{3x^2}{2y^2}$$

2.

$$\frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{81}x^4y^7z} = \frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{3^4}x^4y^7z} = \frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{3\sqrt[3]{3}x^4y^7z} = \sqrt[3]{3}^0 3^{-1}x^0y^{-2} = \frac{1}{3y^2}$$

Definición 1.15 *Se llama* ***polinomio*** *a toda expresión algebraica que es monomio o una suma de monomios.*

Así, como ejemplos de polinomios tenemos

$5 \qquad 3xy^2 \qquad \sqrt{5}x^2y^3z + 6 \qquad 2x^2y + y + \frac{x}{7}$

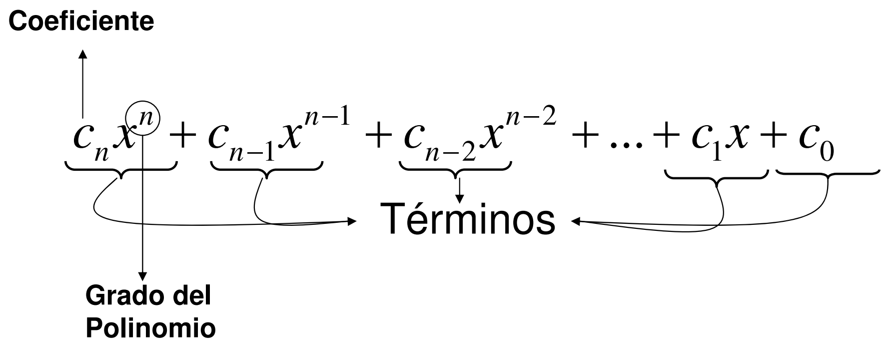
A las expresiones algebraicas que tienen exactamente dos términos se les denomina **binomios** y a las que constan exactamente de tres términos se les llama **trinomios**.
Así $2x - 5$ es un binomio; el polinomio $3 + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un **polinomio** de variable x es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma [1]

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

en donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \cdots, c_n$ son constantes; se tiene que $c_n \neq 0$.
A n se le denomina **grado** del polinomio.

[1] Los tres puntos significan que se supone que los términos intermedios están incluidos en la suma.



Por ello, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3 y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5.

Una constante diferente de 0 es un polinomio de grado 0; de modo que 5 es un polinomio de grado 0. Se considera que la constante 0 es un polinomio; sin embargo no se le asigna ningún grado.

1.10.1. Operaciones con Polinomios.

Definición 1.16 *Puesto que los polinomios son monomios o sumas de monomios no semejantes entre sí, para efectuar operaciones con polinomios haremos uso de las mismas reglas utilizadas para realizar operaciones con monomios.*

La propiedad distributiva es la herramienta clave para multiplicar expresiones.

Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$, se puede considerar que $ax + c$ es un sólo número y después utilizar la propiedad distributiva.

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d.$$

Utilizando la propiedad distributiva,

$$\begin{aligned}(ax + c)bx + (ax + c)d &= abx^2 + cbx + adx + cd\\ &= abx^2 + (ad + cb)x + cd.\end{aligned}$$

$$(ax + c)(bx + d) = abx^2 + a\,d\,x + c\,b\,x + cd$$

Así $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$.
En particular, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = -2$, entonces

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-2) &= 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2)\\ &= 2x^2 - x - 6.\end{aligned}$$

Enseguida se presenta una lista de productos especiales que pueden obtenerse mediante la propiedad distributiva, y que sirven para multiplicar expresiones algebraicas.

Ejemplo 1.29 *Si* $P(x,y) = 3x^2y - 2xy^2 + xy$, $R(x,y) = x^2y^2$, $A(x,y) = -2x^2y + xy^2 + 5xy$ *y* $B(x,y) = xy + x$ *Realicemos las siguientes operaciones:*

$P(x,y) + A(x,y)$ $\qquad$ $A(x,y) - P(x,y)$ $\qquad$ $R(x,y).A(x,y)$ $\qquad$ $P(x,y).A(x,y)$

Comencemos:

$$\begin{aligned}P(x,y) + A(x,y) &= (3x^2y - 2xy^2 + xy) + (-2x^2y + xy^2 + 5xy)\\ &= 3x^2y - 2xy^2 + xy - 2x^2y + xy^2 + 5xy\\ &= (3x^2y - 2x^2y) + (-2xy^2 + xy^2) + (xy + 5xy)\\ &= (3-2)x^2y + (-2+1)xy^2 + (1+5)xy\\ &= x^2y - xy^2 + 6xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(x,y) - P(x,y) &= (-2x^2y + xy^2 + 5xy) - (3x^2y - 2xy^2 + xy)\\ &= -2x^2y + xy^2 + 5xy - 3x^2y + 2xy^2 - xy\\ &= (-2x^2y - 3x^2y) + (xy^2 + 2xy^2) + (5xy - xy\\ &= (-2-3)x^2y + (1+2)xy^2 + (5-1)xy\\ &= -5x^2y + 3xy^2 + 4xy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(x,y).A(x,y) &= (x^2y^2)(-2x^2y+xy^2+5xy)\\
&= -(x^2y^2)2x^2y+(x^2y^2)xy^2+(x^2y^2)5xy\\
&= -2x^4y*3+x^3y^4+5x^3y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x,y).A(x,y) &= (3x^2y-2xy^2+xy)(-2x^2y+xy^2+5xy)\\
&= 3x^2y(-2x^2y+xy^2+5xy)+(-2xy^2)(-2x^2y+xy^2+5xy)\\
&+ xy(-2x^2y+xy^2+5xy)\\
&= -(3x^2y)2x^2y+(3x^2y)xy^2+(3x^2y)5xy\\
&+ (-(-2xy^2)2x^2y)+(-2xy^2)xy^2+(-2xy^2)5xy\\
&+ (-2(xy)x^2y+(xy)xy^2+5(xy)xy)\\
&= -6x^4y^2+3x^3y^3+15x^3y^2\\
&+ 4x^3y^3-2x^2y^4-10x^2y^3\\
&- 2x^3y^2+x^2y^3+5x^2y^2\\
&= -6x^4y^2+(3x^3y^3+4x^3y^3)+(15x^3y^2-2x^3y^2)\\
&- 2x^2y^4+(-10x^2y^3+x^2y^3)+5x^2y\\
&= -6x^4y^2+(3+4)x^3y^3+(15-2)x^3y^2\\
&- 2x^2y^4+(-10+1)x^2y^3+5x^2y\\
&= -6x^4y^2+7x^3y^3+13x^3y^2-2x^2y^4-9x^2y^3+5x^2y
\end{aligned}
$$

1.10.2. Productos Notables

1. $x(y+z)=xy+xz$ (Propiedad distributiva)
2. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$
3. $(ax+c)(bx+d)=abx^2+(ad+cb)x+cd.$
4. $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ (Cuadrado de un binomio)
5. $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ (Cuadrado de un binomio)
6. $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ (Producto de una suma y una diferencia)

7. $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (Cubo de un binomio)

8. $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (Cubo de un binomio)

Ejemplo 1.30 *1.*

$$\begin{aligned}(x+2)(x-5) &= [x+2][x+(-5)]\\ &= x^2 + (2-5)x + 2(-5)\\ & x^2 - 3x - 10.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(3z+5)(7z+4) &= 3\cdot 7z^2 + (3\cdot 4 + 5\cdot 7)z + 5\cdot 4\\ &= 21z^2 + 47z + 20.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= x^2 - 2(4)x + 4^2\\ &= x^2 - 8x + 16.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2+1}+3)(\sqrt{y^2+1}-3) &= (\sqrt{y^2+1})^2 - 3^2\\ &= (y^2+1) - 9\\ &= y^2 - 8.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)(3x) + (2)3\\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.31 *Multiplicar:* $(2t-3)(5t^2+3t-1)$.

Se considera a $2t-3$ *como un solo número y se aplica dos veces la propiedad distributiva.*

$$\begin{aligned}(2t-3)(5t^2+3t-1) &= (2t-3)5t^2 + (2t-3)3t - (2t-3)1\\ &= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3\\ &= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3\end{aligned}$$

Ejemplo 1.32 ***a.*** $\dfrac{x^3+3x}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{3x}{x} = x^2+3.$

b. $\dfrac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z} = \dfrac{4z^3}{2z} - \dfrac{8z^2}{2z} + \dfrac{3z}{2z} - \dfrac{6}{2z} = 2z^2-4z+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{z}.$

Para dividir un polinomio entre otro, se utiliza lo que se denomina "división no abreviada" cuando el grado del divisor es menor que o igual al grado del dividendo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.33 *Dividir* $2x^2-14x-5$ *entre* $x-3$.

Aquí, $2x^2-14x-5$ *es el dividendo y* $x-3$ *es el divisor. Para evitar errores, lo mejor es escribir el dividendo como* $2x^2+0x^2-14x-5$*. Obsérvese que las potencias de* x *se ordenaron en orden decreciente.*

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{2x^2+6x+4 \leftarrow \ \textit{cociente}} \\
(x-3) & 2x^3+0x^2-14x-5 \\
 & \underline{2x^3-6x^2} \\
 & \qquad\quad 6x^2-14x \\
 & \qquad\quad \underline{6x^2-18x} \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x-5 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{4x-12} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 7 \leftarrow \textit{residuo}
\end{array}
$$

1.10.3. División de Polinomios.

Teorema 1.1 *(Algoritmo de la división) Dados dos polinomios* $A(x)$ *y* $B(x)$*, con* $B(x) \neq 0$*, existen únicos polinomios* $Q(x)$ *y* $R(x)$ *tales que:*

$$A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$$

con $R(x)$ *el grado de menor que el grado de* $B(x)$ *o* $R(x) = 0$.

$A(x)$ *recibe el nombre de* ***dividendo****,* $B(x)$ *el de* ***divisor****,* $Q(x)$ *el de* ***cociente*** *y* $R(x)$ *el de* ***residuo****.*

Procedimiento para efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$.

a.) Ordenar los polinomios y $B(x)$, en forma descendente de acuerdo con el exponente de la variable.

b.) Se divide el primer sumando del dividendo (el de mayor exponente)por el primer sumando del divisor (el de mayor exponente); el resultado es un sumando del cociente.

c.) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor, y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un residuo "parcial".

d.) Si el residuo obtenido en el paso anterior es cero o de grado menor que el divisor, ahí terminó el procedimiento, en caso contrario se repiten los pasos (a), (b), (c) y (d), pero tomando como dividendo el residuo obtenido en el paso anterior.

Ejemplo 1.34 *Efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$ donde $A(x) = 2-x^5$ y $B(x) = x^2+x$*

$$
\begin{array}{r|l}
-x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+2 & x^2+x \\ \cline{2-2}
x^5-x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & -x^3+x^2-x+1 \\ \hline
x^4+0x^3+0x^2+0x+2 & \\
x^4+x^3 \qquad\qquad\qquad & \\ \hline
-x^3+0x^2+0x+2 & \\
-x^3-x^2 \qquad\qquad & \\ \hline
x^2+0x+2 & \\
x^2+x \qquad & \\ \hline
-x+2 &
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $-x^3+x^2-x+1$ y el residuo es $-x+2$

Ejemplo 1.35 *Sea $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$ y $B(x) = x - 1$*
Efectúe la división de $A(x)$ por $B(x)$, e indique el cociente y el residuo

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2-4x-3 \\ \hline
-4x^2+x-1 & \\
-4x^2+4x \qquad & \\ \hline
-3x-1 & \\
-3x+3 & \\ \hline
-4 &
\end{array}
$$

Aquí el cociente es x^2-4x-3 y el residuo es -4.

Definición 1.17 *Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos polinomios con $B(x) \neq 0$. Si al dividir $A(x)$ por $B(x)$ se obtiene como residuo cero entonces decimos que $A(x)$ es divisible por $B(x)$ y se cumple que: $A(x) = B(x)Q(x)$; donde $Q(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$.*

Ejemplo 1.36 *Sean $A(x)$ y $B(x)$ polinomios tales que: $A(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ y $B(x) = x^2 - 3x - 1$. Determine el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$. ¿ Es divisible $A(x)$ por$B(x)$?*

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + 2x + 1 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 + x & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 3x + 1 & \\
x^2 - 3x - 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Aquí el cociente es $x - 1$ y el residuo es 0; así como en este caso el residuo es 0 es divisible $A(x)$ por $B(x)$.

División sintética

La división sintética es un procedimiento "abreviado" para determinar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ de grado n , $n \geq 1$, por un polinomio de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, a partir de los coeficiente de $P(x)$ y el cero de $x - \alpha$.

El procedimiento que usaremos para realizar la división sintética de un polinomio , por un polinomio de la forma , lo ilustraremos a través de ejemplos.

El procedimiento que usaremos para realizar la división sintética de un polinomio $P(x)$, por un polinomio de la forma $x - \alpha$, lo ilustraremos a través de ejemplos.

Ejemplo 1.37 *Queremos dividir $A(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ por $B(x) = x - 1$*

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & 3 & -5 & 2 \\
3 & & 12 & 45 & 120 \\ \hline
 & 4 & 15 & 40 & 122
\end{array}$$

Coeficientes del Polinomio P(x)

Cero de $x - 3$

Residuo

Coeficientes del Cociente

Donde los números 4, 15 y 40 son los coeficientes del cociente y 122 el residuo de la división.

Los números representados en la primera fila son los coeficientes de (dividendo).

Los números representados en la segunda fila son el cero de (divisor) y los demás se obtienen de la siguiente forma:

- *12 es el producto de 4 y 3,*
- *45 es el producto de 15 y 3,*
- *120 es el producto de 40 y 3*

Los números representados en la tercera fila se obtienen de la siguiente forma:

- *4 es el coeficiente de* x^3 *en* $A(x)$
- *15 es la suma de 3 y 12,*
- *40 es la suma de -5 y 45*
- *122 es la suma de 2 y 120*

Ejemplo 1.38 *Procedemos ahora a dividir* $P(x) = -8x^3 + x^4 - 16 + 2x$ *por* $Q(x) = x - 8$

	1	-8	0	2	-16
8		8	0	0	16
	1	0	0	2	0

Coeficientes del Cociente — **Residuo**

Donde los números 1, 0, 0, 2 son los coeficientes del cociente y 0 el residuo de la división. Así, nos queda que $-8x^3+x^4-16+2x$ *por* $x-8$ *es igual a* $x^3+0x^2+0x+2 = x^3+2$

Ejercicios. 1.4 

1. *Realizar las operaciones que se indican y simplificar.*

   a) $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$.

   b) $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$.

   c) $2t - 3\{t + 2[t - (t + 5)] + 1\}$

   d) $3 + 2(a + b) - [a - b - 5(a + 2b)]$

e) $a - 2\{-(b-c) + 2[a + 3(b+c)]\}$

f) $3x(2x^2 - xy) + x - x(x + 5xy)$

g) $(3x^2)(-x^3y)(-a^2x)$

h) $\left(-\dfrac{1}{2}x^2y\right)\left(-\dfrac{3}{5}xy^2\right)\left(\dfrac{10}{3}x^3y\right)$

i) $(2a)^5(-a)^2(-xa^3)(4a)$

j) $(-a^m)(2ab)(-3a^2b^n)$

k) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

l) $(\sqrt{x}\sqrt{2y}) + (\sqrt{x}\sqrt{3z})$

m) $(3x + 2y - 5) - (8x - 4y + 2)$.

n) $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$.

ñ) $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

o) $(\sqrt{x}\sqrt{2y}) - (\sqrt{x}\sqrt{3z})$.

p) $4(2z - w) - 3(w - 2z)$.

q) $3(3x + 2y - 5) - 2(8x - 4y + 2)$.

r) $(2s + t) - 3(s - 6) + 4(1 - t)$.

s) $3(x^2 + y^2) - x(y + 2x) + 2y(x + 3y)$.

t) $2 - [3 + 4(s - 3)]$.

u) $2\{3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\}$

v) $4\{3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]\}$.

w) $-3\{4x(x + 2) - 2[x^2 - (3 - x)]\}$.

x) $-\{-2[2a + 3b - 1] + 4[a - 2b] - a[2(b - 3)]\}$.

y) $(x + 4)(x + 5)$.

z) $(x + 3)(x + 2)$.

2. *Realizar las operaciones que se indican y simplificar.*

a) $(z - 7)(z - 3)$.

b) $(2x + 3)(5x + 2)$.

c) $(y - 4)(2y + 3)$.

d) $(x + 3)^2$.

e) $(2x - 1)^2$.

f) $(x - 5)^2$.

g) $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$.

h) $(\sqrt{2y} + 3)^2$.

i) $(y - 3)(y + 3)$.

j) $(2s - 1)(2s + 1)$.

k) $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$.

l) $(x^2 - 3)(x + 4)$.

m) $(x + 1)(x^2 + x + 3)$.

n) $(x^2 - 1)(2x^2 + 2x - 3)$.

ñ) $(2x - 1)(3x^3 + 7x^2 - 5)$.

o) $x\{3(x - 1)(x - 2) + 2[x(x + 7)]\}$.

p) $[(2z + 1)(2z - 1)](4z^2 + 1)$.

q) $(x + y + 2)(3x + 2y - 4)$.

r) $(x^2 + x + 1)^2$.

s) $(x + 5)^3$.

t) $(x - 2)^3$.

u) $(2x - 3)^3$.

v) $(x + 2y)^3$.

w) $\dfrac{z^2 - 4z}{z}$.

x) $\dfrac{2x^3 - 7x + 4}{x}$.

y) $\dfrac{6x^5 + 4x^3 - 1}{2x^2}$.

3. *Realizar las operaciones que se indican y simplificar.*

a) $\dfrac{(3x-4)-(x+8)}{4x}$.

b) $(x^2+3x-1)\div(x+3)$.

c) $(x^2-5x+4)\div(x-4)$.

d) $(3x^3-2x^2+x-3)\div(x+2)$.

e) $(x^4+2x^2+1)\div(x-1)$.

f) $t^2\div(t-8)$.

g) $(4x^2+6x+1)\div(2x-1)$.

h) $(3x^2-4x+3)(3x+2)$.

i) $(z^3+z^2+z)\div(z^2-z+1)$.

4. *Simplifique cada una de las siguientes expresiones*

a) $\dfrac{-2xx^{-1}z^{-1}}{x^3y^{-2}z}$ b) $\left(\dfrac{-2a^{-2}b^{-1}}{-4a^{-4}b^2}\right)^{-1}$ c) $\sqrt{\dfrac{9a^4x^{-4}}{25a^{-2}x^4}}$

5. *Racionalice las operaciones indicadas.*

a) $(\sqrt{75}xy^{\frac{3}{2}})\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{5\sqrt{3}}\right)$

b) $\sqrt{8a^2b^2}-\sqrt{5ab^2}-2c\sqrt{2}+10\sqrt{2a}$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2m^5n^3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{16mn^2}\right)$

d) $\sqrt{\dfrac{ab^2}{4c^2}}+\sqrt{\dfrac{9ab^4}{c^{-2}}}-\sqrt{a}$

e) $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}c^2}+\left(\dfrac{100a^4}{b^2c^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

6. *Simplifique*

a) $\dfrac{xy^{-\frac{1}{2}}z^{-3}}{4x^{-\frac{3}{4}}y^2x^{-\frac{2}{3}}}$ b) $\left(\dfrac{3xy^2z^3}{x^{-1}y^{-2}z}\right)^{-1}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{25x^{-2}y^3}{100x^{-4}}y^2}$

7. *Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ que se definen a continuación, determine el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$. ¿ $A(x)$ es divisible por $B(x)$?-*

a) $A(x)=-3x^3+2x^2-3x+1$ $B(x)=1+x^2$

b) $A(x)=5x^4+10x^3+4x^2+7x-2$ $B(x)=x-4$

c) $A(x)=2x-4x^2+3x^3-1$ $B(x)=1+2x+x^{+}2$

d) $A(x)=3x^3+2x^4-5-x$ $B(x)=-5+2x^3+2x-x^2$

8. *Realice la división sintética de $P(x)$ por $Q(x)$ en cada uno de los siguientes casos.*

a) $P(x)=x^5-32$ $Q(x)=x-2$

b) $P(x)=-7x^2+8x+5x^3+1$ $Q(x)=x+3$

c) $P(x) = x^3 - 27$ $\quad Q(x) = x + 3$

d) $P(x) = x - x^4$ $\quad Q(x) = x + 1$

e) $P(x) = 6 - 5x + 4x^2$ $\quad Q(x) = x + 2$

1.11. Factorización

Definición 1.18 *Sea P un polinomio no constante con coeficientes reales. Si existen polinomios A y B no constantes, con coeficientes reales tales que $P = A \cdot B$ entonces decimos que P es factorizable en el conjunto de los números reales.*

Definición 1.19 *Sean A, By P polinomios no constantes con coeficientes reales. Si $P = A \cdot B$ entonces decimos que A y B son factores de P .*

Definición 1.20 *Sean A, B y P polinomios no constantes con coeficientes reales. Si $P = A \cdot B$ entonces decimos que el producto indicado de A y B es una factorización de P .*

Ejemplo 1.39

1. *Así, como $x^2 + 2x = x(x + 2)$ entonces decimos que $x(x + 2)$ es una factorización de $x^2 + 2x$.*

$$x^2 + 2x = x(x + 2)$$

Factores

2. *Además $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ entonces decimos que $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ es una factorización de $x^4 - 1$.*

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

Factores

Observación 1.6 *Sea P un polinomio no constante con coeficientes reales; si no existen polinomios A y B no constantes con coeficientes reales y tales que $P = A \cdot B$, entonces decimos que P **no es factorizable** en el conjunto de los números reales.*

Definición 1.21 *Sea P un polinomio no constante con coeficientes reales tal que $P = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n$ donde $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ son polinomios no constantes con coeficientes reales. Decimos que el producto indicado es una **factorización completa** de si cada uno de lo polinomios no es factorizable en el conjunto de los números reales.*

1.12. Técnicas de factorización

Factorización por factor común

La factorización de polinomios por factor común consiste básicamente en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, para esto recordemos que esta propiedad expresa:

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

De forma general, si $a, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ entonces

$$a(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + \cdots + ab_n.$$

En este caso decimos que $a(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$ es una factorización de $ab_1 + ab_2 + ab_3 + \cdots + ab_n$ y que a es el factor común de los sumandos $ab_1, ab_2, ab_3, \cdots, ab_n$.

Ejemplo 1.40 *1.*

$$\begin{aligned} x^2y^3z + x^3y^2z^2 &= x^2y^2yz + x^2xy^2zz \\ &= x^2y^2z(y + xy) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (3a + 15) - b(a + 5) &= 3(a + 5) - b(a + 5) \\ &= (a + 5)(3 - b) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} a(x - y) &= a(x - y) + (-1)(x - y) \\ &= (x - y)(a - 1) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 14x^2 - 28x^3 + 56x^2y &= 14x^2 \cdot 1 - 14x^2 \cdot 2x + 14x^2 \cdot 4y \\ &= 14x^2(1 - 2x + 4y) \end{aligned}$$

Factorización por agrupación

Dado un polinomio en el cual no existe un factor común no constante a todos los sumandos que lo componen, en algunos casos es posible obtener la factorización de dicho polinomio, realizando una "agrupación conveniente" de aquellos sumandos que poseen un factor común.

Ejemplo 1.41 *1.*

$$\begin{aligned} 5by - 5y + 2ba - 2a &= (5by - 5y) + (2ba - 2a) \\ &= 5y(b-1) + 2a(b-1) \\ &= (b-1)(5y+2a) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3xy - 3y + 2x &= 2x^2 - 3xy + (-3y) + 2x \\ &= (2x^2 - 3xy) + ((-3y) + 2x) \\ &= x(2x - 3y) + (2x - 3y) \\ &= (2x - 3y)(x + 1) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 4a^2x + 3bm - 4ab - 3max &= (4a^2x - 4ab) + (3bm - 3max) \\ &= 4a(ax - b) + 3m(b - ax) \\ &= 4a(ax - b) + 3m(-1)(ax - b) \\ &= (ax - b)(4a + 3m(-1)) \\ &= (ax - b)(4a - 3m) \end{aligned}$$

Factorización por fórmulas notables

En esta sección recordemos algunos productos notables, ya enunciados antes, en los cuales se establecen ciertas identidades, que denominaremos fórmulas notables, y que serán utilizadas para factorizar algunas expresiones algebraicas.

Teorema 1.2 *1. Como $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$, entonces $(x+a)(x+b)$ es la factorización de $x^2 + (a+b)x + ab$*

2. Como $abx^2 + (ad+cb)x + cd = (ax+c)(bx+d)$, entonces $(ax+c)(bx+d)$ es la factorización de $abx^2 + (ad+cb)x + cd$

3. Como $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$, entonces $(x+a)^2$ es la factorización de $x^2 + 2ax + a^2$

4. Como $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$, entonces $(x-a)^2$ es la factorización de $x^2 - 2ax + a^2$

5. Como $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$, entonces $(x+a)(x-a)$ es la factorización de $x^2 - a^2$

6. *Como* $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$, *entonces* $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ *es la factorización de* x^3+a^3

7. *Como* $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, *entonces* $x-a)(x^2+ax+a^2)$ *es la factorización de* x^3-a^3

Ejemplo 1.42 1. $x^2+10x+25=(x)^2+2(x)(5)+5^2=(x+5)^2$

2. $4x^2+20x+25=(2x)^2+2(2x)(5)+5^2=(2x+5)^2$

3. $9a^2+6a+1=(3a)^2+2(3a)(1)+1^2=(3a+1)^2$

4. $2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2)$

5. $x^2+8x+16=(x+4)^2$

6. $9x^2+9x+2=(3x)^2+3(3x)+2.1=(3x+1)(3x+2)$

7. $6y^3+3y^2-18=3y(2y^2+y-6)=3y(2y-3)(y+2)$

8. $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

9. $\dfrac{x^2}{4}-\sqrt{3}x+3=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-2\dfrac{x}{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=\left(\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\right)$

10. $3a^2-2\sqrt{6}ab+2b^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}a\sqrt{2}b+(\sqrt{2}b)^2=(\sqrt{3}a-\sqrt{2}b)^2.$

11. $4x^2-y^2=(2x)^2-y^2=(2x+y)(2x-y).$

12. $3x^2-\dfrac{c^2}{25}=(\sqrt{3}x)^2-\left(\dfrac{c}{5}\right)=\left(\sqrt{3}x+\dfrac{c}{5}\right)\left(\sqrt{3}x-\dfrac{c}{5}\right)$

13. $9x^2-12x+4-y^2=(9x^2-12x+4)-y^2$

Ejemplo 1.43 1.

$$\begin{aligned}
9x^2-12x+4-y^2 &= (9x^2-12x+4)-y^2\\
&= [(3x)^2-2(3x)2+2^2]-y^2\\
&= (3x-2)^2-y^2\\
&= (3x-2-y)(3x-2+y)
\end{aligned}$$

2. $27+p^3=3^3+p^3=(3+p)(3^2-3p+p^2)=(3+p)(9-3p+p^2)$

3. $x^3+2=x^3+\sqrt[3]{2}^3=(x+\sqrt[3]{2})(x^2-x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

4. $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

5.

$$\begin{aligned} 54x^3 - 2y^3 &= 2(27x^3 - y^3) \\ &= 2((3x)^3 - y^3) \\ &= 2[(3x-y)[(3x)^2 + 3xy + y^2]] \\ &= 2(3x-y)(9x^2+3xy+y^2) \end{aligned}$$

6. $3a^3b^3 - 125 = (\sqrt[3]{3}ab)^3 - 5^3 = [\sqrt[3]{3}ab - 5][\sqrt[3]{9}a^2b^2 + 5\sqrt[3]{3}ab + 25]$

Ejercicios. 1.5 

Factorizar completamente las expresiones.

1. $6x+4.$
2. $6y^2 - 4y.$
3. $10xy + 5xz$
4. $3x^2y - 9x^3y^3$
5. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$
6. $6z^2t^3 + 3zst^4 - 12z^2t^3$
7. $x^2 - 25$
8. $x^2 + 3x - 4$
9. $p^2 + 4p + 3$
10. $s^2 - 6s + 8$
11. $6x^2 - 9$
12. $x^2 + 5x - 24$
13. $z^2 + 6z + 8$
14. $4t^2 - 9s^2$
15. $x^2 + 6x + 9$
16. $y^2 - 15y + 50$
17. $2x^2 + 12x + 16$
18. $2x^2 + 7x - 15$
19. $3x^2 - 3$
20. $4y^2 - 8y + 3$
21. $6y^2 + 13y + 2$
22. $4x^2 - x - 3$
23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$
24. $9z^2 + 24z + 16$
25. $12s^3 + 10s^2 - 8s$
26. $9z^2 + 24z + 16$
27. $x^{2/3}y - 4x^{8/3}y^3$

28. $9x^{4/7} - 1.$
29. $2x^3 + 2x^2 - 12$
30. $9x^{4/7} - 1$
31. $2x^3 + 2x^2 - 12$
32. $x^2y^2 - 4xy + 4.$
33. $(4x + 2)^2$
34. $3s^2(3s - 9s^2)^2$
35. $x^3y^2 - 10x^2y + 25x$
36. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$
37. $(3x^2 + x) + (6x + 2)$
38. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$
39. $(y^{10} + 8y^6 + 16y^2) - (y^8 + 8y^4 + 16)$
40. $x^3y - xy + z^2x^2 - z^2$
41. $x^3 + 8$
42. $x^3 - 1$
43. $x^6 - 1$
44. $27 + 8x^3$
45. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$
46. $(x + 5)^2(x + 1)^3 + (x + 5)^3(x + 1)^2$
47. $P(1 + r) + P(1 + r)r$
48. $(x - 3)(2x + 3) - (2x + 3)(x + 5)$
49. $x^4 - 16.$
50. $81x^4 - y^4$
51. $y^8 - 1.$
52. $t^4 - 4$
53. $x^4 + x^2 - 2$
54. $x^4 - 5x^2 + 4$
55. $x^5 - 2x^3 + x$
56. $4x^3 - 6x^2 - 4x$

1.13. Completación de cuadrados

Este procedimiento nos permitirá obtener a partir de una expresión de la forma $x^2 + bx + c$, una expresión de la forma $\left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 + k$

Teorema 1.3 *Si b y c son constantes reales y x es una variable real, entonces se cumple la siguiente igualdad:*

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Ejemplo 1.44 *1.* $x^2 + 6x + 5 = \left(x + \dfrac{6}{2}\right)^2 - \dfrac{6^2}{4} + 5 = (x + 3)^2 - 4$

2. $x^2 - 3x + 2 = x^2 + (-3)x + 2 = \left(x + \frac{-3}{2}\right)^2 - \frac{(-3)^2}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Factorización por completación de cuadrados

Usando la completación de cuadrados factoricé cada una de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5^2}{4} + 4 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &= \left[x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right]\left[x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right] \\ &= \left[x - \frac{2}{2}\right]\left[x + \frac{8}{2}\right] \\ &= [x-1]\,[x+4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2 &= \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 2 \\ &= (x+2)^2 - 4 + 2 \\ &= (x+2)^2 - 2 \\ &= (x+2)^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= (x + 2 - \sqrt{2})(x + 2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

1.14. Simplificación de fracciones racionales.

Definición 1.22 *Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios en una variable. La expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ recibe el nombre de* ***fracción racional****, $Q(x)$ recibe el nombre de* ***numerador*** *y $Q(x)$ recibe el nombre de* ***denominador*** *de la fracción.*

Ejemplo 1.45 *1. Simplificar* $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}$. *Para ello procedemos de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12} &= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)}\\
&= \frac{(x-3)(x+2)}{(x-4)(x-3)}\\
&= \frac{x+2}{x-4} \qquad si \quad x-3\neq 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+6x-8}{8-4x-4x^2} &= \frac{2(x^2+3x-4)}{-4(x^2+x-2)}\\
&= \frac{2(x+4)(x-1)}{-4(x+2)(x-1)}\\
&= \frac{(x+4)}{-2(x+2)} \qquad si \quad x-1\neq 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} &= \frac{(x^3+2x^2)-(x+2)}{(x-1)(x+1)}\\
&= \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{(x-1)(x+1)}\\
&= \frac{(x+2)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}\\
&= \frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}\\
&= x+2 \qquad si \quad x+1\neq 0 \quad y \quad x-1\neq 0
\end{aligned}$$

En ocasiones, el denominador de una fracción tiene dos términos se implica raíces cuadradas, como $2-\sqrt{3}$ o bien $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. Se puede racionalizar el denominador multiplicando por una expresión que haga que el denominador se convierta en la diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

Ejemplo 1.46

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}\\
&= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.47 *Para racionalizar los denominadores en los siguientes casos*

1.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{2}-6} &= \frac{x}{\sqrt{2}-6}\cdot\frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6}\\
&= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2-6^2}\\
&= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}
\end{aligned}
$$

Para realizar operaciones con fracciones racionales usaremos los procedimientos utilizados para realizar operaciones con números racionales. Así:

Si $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ son fracciones racionales entonces son verdaderas las siguientes igualdades:

1. $\dfrac{A(x)}{B(x)}+\dfrac{C(x)}{D(x)}=\dfrac{A(x)D(x)+C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$

2. $\dfrac{A(x)}{B(x)}-\dfrac{C(x)}{D(x)}=\dfrac{A(x)D(x)-C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$

3. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \cdot \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)C(x)}{B(x)D(x)}$

4. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \div \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{\frac{A(x)}{B(x)}}{\frac{C(x)}{D(x)}} = \dfrac{A(x)D(x)}{B(x)C(x)}$

Ejemplo 1.48 *1.*

$$\frac{p^2-5}{p-2} + \frac{3p+2}{p-2} = \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2} = \frac{p^2+3p-3}{p-2}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} - \frac{x^2+2x}{x^2+5x+6} &= \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{x-4}{x+3} - \frac{x}{x+3} \qquad \textit{si} \quad x-1 \neq 0 \ \textit{y} \ x+2 \neq 0 \\
&= \frac{(x-4)-x}{x+3} = -\frac{4}{x+3}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} + \frac{-4x+8}{x^2-9x+14} &= \frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} + \frac{-4(x-2)}{(x-2)(x-7)} \\
&= \frac{(x^2+x-5)-(x^2-2)+(-4)}{x-7} \textit{si}\ x-2 \neq 0 \\
&= \frac{x-7}{x-7} = 1.
\end{aligned}$$

Observación 1.7 *Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores diferentes, se debe utilizar el principio fundamental de las fracciones para expresarlas como fracciones equivalentes con el mismo denominador. Después, se procede a la adición (o a la sustracción), mediante el método antes descrito.*

Por ejemplo, para evaluar

$$\frac{2}{x^3(x-3)} + \frac{3}{x(x-3)^2},$$

se puede convertir la primera fracción en otra equivalente multiplicando el numerador y el denominador por $(x-3)$:

$$\frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2};$$

Se puede transformar la segunda fracción multiplicando su numerador y su denominador por x^2:

$$\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}.$$

Estas fracciones tienen el mismo denominador.Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^3(x-3)}+\frac{3}{x(x-3)^2} &= \frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2}+\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}\\ &= \frac{3x^2+2x-6}{x^3(x-3)^2}.\end{aligned}$$

Se pudieron haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con cualquier denominador común. Sin embargo, se decidió convertirlas en fracciones con el denominador $x^3(x-3)^2$. Este es el **mínimo común denominador** (M.C.D.) de las fracciones $\dfrac{2}{[x^3(x-3)]}$ y $\dfrac{3}{[x(x-3)^2]}$.

En general, para encontrar el M.C.D. de dos o más fracciones, primero se factoriza cada denominador en forma completa.*El M.C.D es el producto de cada uno de los factores distintos que aparecen en los denominadores, cada uno de ellos elevado a la más alta potencia que ocurra en cualquiera de los denominadores.*

Ejemplo 1.49 *1.*

$$\begin{aligned}\frac{t}{3t+2}-\frac{4}{t-1} &= \frac{t(t-1)}{(3t+2)(t-1)}-\frac{4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}\\ &= \frac{t(t-1)-4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}\\ &= \frac{t^2-t-12t-8}{(3t+2)(t-1)}\\ &= \frac{t^2-13t-8}{(3t+2)(t-1)}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{q-1}+3 &= \frac{4}{q-1}+\frac{3(q-1)}{q-1}\\
&= \frac{4+3(q-1)}{q-1}\\
&= \frac{3q+1}{q-1}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x^2+6x+9}-\frac{x+2}{2(x^2-9)} &= \frac{x-2}{(x+3)^2}-\frac{x+2}{2(x+3)(x-3)}\\
&= \frac{(x-2)(2)(x-3)}{(x+3)^2(2)(x-3)}-\frac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)(x-3)(x+3)}\\
&= \frac{(x-2)(2)(x-3)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)^2(x-3)}\\
&= \frac{2(x^2-5x+6)-(x^2+5x+6)}{2(x+3)^2(x-3)}\\
&= \frac{2x^2-10x+12-x^2-5x-6}{2(x+3)^2(x-3)}\\
&= \frac{x^2-15x+6}{2(x+3)^2(x-3)}.
\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} &= \frac{\dfrac{x}{x(x+h)}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h}\\
&= \frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}\\
&= \frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{\dfrac{h}{1}}\\
&= \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}
\end{aligned}
$$

Ejercicios. 1.6

Ejecutar, en cada uno de los siguientes casos, las operaciones y simplificar cuanto sea posible.

1. $\dfrac{y^2}{y-3}\cdot\dfrac{-1}{y+2}$.
2. $\dfrac{z^2-4}{z^2+2z}\cdot\dfrac{z^2}{z-2}$.
3. $\dfrac{2x-3}{x-2}\cdot\dfrac{2-x}{2x+3}$
4. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{y-x}$.
5. $\dfrac{2x-2}{x^2-2x-8}\div\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$
6. $\dfrac{x^2+2x}{3x^2-18x+24}\div\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}$.
7. $\dfrac{\dfrac{x^2}{6}}{\dfrac{x}{3}}$
8. $\dfrac{\dfrac{4x^3}{9x}}{\dfrac{x}{18}}$.
9. $\dfrac{\dfrac{2m}{n^3}}{\dfrac{4m}{n^2}}$.

10. $\dfrac{\dfrac{4x^3}{9x}}{\dfrac{x}{18}}$

11. $\dfrac{\dfrac{2m}{n^3}}{\dfrac{4m}{n^2}}$

12. $\dfrac{\dfrac{c+d}{c}}{\dfrac{c-d}{2c}}$.

13. $\dfrac{\dfrac{4x}{3}}{2x}$.

14. $\dfrac{4x}{\dfrac{3}{2x}}$

15. $\dfrac{-9x^3}{\dfrac{x}{3}}$.

16. $\dfrac{\dfrac{-9x^3}{x}}{3}$.

17. $\dfrac{x-5}{\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}}$

18. $\dfrac{\dfrac{x^2+6x+9}{x}}{x+3}$.

19. $\dfrac{\dfrac{10x^3}{x^2-1}}{\dfrac{5x}{x+1}}$

20. $\dfrac{\dfrac{x^2+6x+9}{x}}{x+3}$

21. $\dfrac{\dfrac{10x^3}{x^2-1}}{\dfrac{5x}{x+1}}$

22. $\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}}{\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}}$

23. $\dfrac{\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-2x-8}}{\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}}$.

24. $\dfrac{\dfrac{(x+2)^2}{3x-2}}{\dfrac{9x+18}{4-9x^2}}$

25. $\dfrac{\frac{4x^2-9}{x^2+3x-4}}{\dfrac{2x-3}{1-x^2}}$

26. $\dfrac{\dfrac{6x^2y+7xy-3y}{xy-x+5y-5}}{\dfrac{x^3y+4x^2y}{xy-x+4y-4}}$.

27. $\dfrac{x^2}{x+3}+\dfrac{5x+6}{x+3}$

28. $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x}{x+2}$

29. $\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{3t}$

30. $\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x}$.

Bracamonte Mireya
Ere Jurancy
Mendoza Maln
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

31.

32. $-\dfrac{p^2}{p^2-1}$

33. $\dfrac{4}{s+4}+s$

34. $\dfrac{4}{2x-1}+\dfrac{x}{x+3}$

35. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$

36. $\dfrac{y}{3y^2-5y-2}-\dfrac{2}{3y^2-7y+2}$

37. $\dfrac{4}{x-1}-3+\dfrac{-3x^2}{5-4x-x^2}$.

38. $\dfrac{2x-3}{2x^2+11x-6} - \dfrac{3x+1}{3x^2+16x-12} + \dfrac{1}{3x-2}$

39. $(1+x^{-1})^2$.

40. $(x^{-1}+y^{-1})^2$

41. $(x^{-1}-y)^{-1}$

42. $(x-y^{-1})^{-2}$

43. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{3}$

44. $\dfrac{\dfrac{x+3}{x}}{x-\dfrac{9}{x}}$

45. $\dfrac{3-\dfrac{1}{2x}}{x+\dfrac{x}{x+2}}$.

46. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2+5x+6}-\dfrac{1}{x+2}}{3+\dfrac{x-7}{3}}$

47. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$

48. $\dfrac{(x^{-2}-4y^{-2})^{-1}}{x-\dfrac{xy}{y+2x}}$

49. $\dfrac{x}{y+3}-\dfrac{x^2-1}{xy+3x}-\dfrac{1-6x}{y^2-9}$

50. $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)$

51. $\dfrac{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}} \div \dfrac{x+y}{xy}$

52. $\dfrac{2x^{-}6}{(x+1)^2x^{-4}-(2x+1)x^{-4}}$

Capítulo 2

Ecuaciones

Con el estudio de este capitulo los objetivos que se pretenden lograr son:

- Obtener ecuaciones equivalentes a una dada mediante suma o producto.
- Identificar soluciones de ecuaciones.
- Plantear y resolver problemas de la vida diaria.

En los escritos de los antiguos babilónicos y egipcios se han encontrado problemas que dan lugar a ecuaciones. Por ello no es extraño que estudiantes que se inician en las diversas áreas de estudio, se vean enfrentados con la solución de algunas ecuaciones.

Definición 2.1 *Una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de las expresiones involucran variables recibe el nombre de* ***ecuación****.*

Ejemplo 2.1 *Así, como ejemplo tenemos*

1. $3x^2y + 3y = 5$ *2.* $\sqrt{x^2+1} = x + 2$ *3.* $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{5y}{2} + 1$

Las expresiones que están a ambos lados del signo igual son los **miembros de la ecuación**: primer miembro el de la izquierda, segundo miembro el de la derecha.

$$\underbrace{2xy^2 + 3x - 8}_{\textbf{Primer Miembro}} = \underbrace{-3y}_{\textbf{Segundo Miembro}}$$

Definición 2.2 *Se denomina* ***solución*** *o* ***raíz*** *de una ecuación a un valor o conjunto de valores de la(s) incógnita(s), para los cuales se verifica la igualdad. Así, resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación se verifica.*

Observación 2.1 1. *En una ecuación las variables reciben el nombre de **incógnitas**.*

2. *Si se quiere comprobar que el valor de la raíz esta correcto, simplemente se sustituye la variable por el número (valor) de la raíz.*

Al conjunto de todas las soluciones se le denomina **conjunto solución** de la ecuación.

Ejemplo 2.2 1. *En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. El único valor de x que satisface la ecuación es 1. Por ello, 1 es una raíz y el conjunto de soluciones es $\{1\}$.*

2. *$w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es el par de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una cantidad infinita de soluciones. Puede el lector pensar otras.*

3. *-2 es raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ debido a que al sustituir x por -2 la ecuación se verifica : $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.*

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución.

Así, la ecuación $3x - 7 = x + 1$ es equivalente a $2x - 8 = 0$ porque ambas tienen como solución única $x = 4$

Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

Principio de Adición. Sumar (o restar) una misma expresión algebraica a ambos miembros de una ecuación, cuando la expresión tiene la misma variable de la ecuación.

Principio de Multiplicación. Multiplicar (o dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, exceptuando el cero.

Ejemplo 2.3

- *Si tenemos la ecuación $3x = 5 - 6x$, al sumar $6x$ a ambos lados de la igualdad produce la ecuación equivalente, a saber, $3x + 6x = 5 - 6x + 6x$, o bien $9x = 5$.*

- *En el caso de la ecuación* $10x = 5$*, al dividir ambos lados entre 10 produce la ecuación* $\dfrac{10x}{10} = \dfrac{5}{10}$*, o bien* $x = \dfrac{1}{2}$.

2.1. Clasificación de las Ecuaciones.

Podemos clasificar las ecuaciones por:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{el número de incógnitas.} & \\ \text{el grado de la incógnita.} & \left\{\begin{array}{c} \text{Polinómicas} \\ \text{Racionales} \\ \text{Exponenciales} \\ \text{Trigonométricas} \\ \vdots \end{array}\right. \\ \text{el número de términos.} & \left\{\begin{array}{c} \text{Binómicas} \\ \text{Polinómicas} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Por el número de Incógnitas.

Las ecuaciones pueden tener una o más incógnitas.

Así, por ejemplo la ecuación $5x+4 = 2$, sólo tiene una incógnita, la ecuación $4x+y = 1$, tiene dos y $2yx - 6z = -1$ tiene tres incógnitas.

Un dato interesante es que, el conjunto de soluciones de las ecuaciones con una incognita se pueden representar como puntos sobre la recta real.

Si la ecuación es de dos incógnitas el conjunto de soluciones se pueden ver como curvas en un plano. Y finalmente, al conjunto solución de las de tres incógnitas como curvas en un espacio de tres dimensiones. Sin embargo, esto escapa a los alcances de este curso, por lo tanto serán tratados en los cursos posteriores.

Por el grado de la incógnita.

Las ecuaciones de una incógnita se pueden clasificar por el grado de la incógnita (el grado es el exponente más alto de la incógnita).

Las ecuaciones **polinómicas** son de la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio en x, que al trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

Por ejemplo, $3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ es una ecuación polinómica.

Las ecuaciones polinómicas de primer grado, $ax + b = 0$, usualmente es llamada **ecuación lineal**.

Un ejemplo será la ecuación $4x + \frac{1}{2} = -2$

Fijese en la ecuación $7-3(x-3)^2 = -3x^2$ también es lineal, ya que podemos encontrar una ecuación equivalente, utilizando las operaciones indicadas anteriormente, así,

$$\begin{aligned}
7-3(x-3)^2 &= -3x^2\\
7-3(x^2-6x+9) &= -3x^2\\
7-3x^2+18x-27 &= -3x^2\\
7-3x^2+18x-27+3x^2 &= -3x^2+3x^2\\
18x-20 &= 0
\end{aligned}$$

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado responden a la estructura:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

y se les llama **cuadráticas**.

Como ejemplo de ecuaciones cuadráticas tenemos: $x^2 - 5x + 3 = 0$ y $x^2 = 4$.

Las ecuaciones **radicales** son aquellas en las que la incógnita está bajo un signo radical, como: $\sqrt{2x-2} = 1$.

Las ecuaciones **racionales** son ecuaciones en las que aparecen cocientes de polinomios; por ejemplo:

$$\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}.$$

En las ecuaciones **exponenciales** la incógnita está en un exponente: $3^x = 9$.

En las ecuaciones **logarítmica** la incógnita se encuentra afectada por el logaritmo, en este caso la solución debe satisfacer ciertas restricciones: $log(x-1) = 10$.

En las ecuaciones **trigonométricas** la incógnita está afectada por alguna función trigonométrica; por ejemplo: $Sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x) = 1$

2.2. Resolución de Ecuaciones

Resolver una ecuación, como ya se dijo antes, es hallar su solución, o soluciones (si es el caso), o verificar que no tiene solución.

Para tal fin, dada una ecuación se halla una equivalente cuya apariencia sea más sencilla.

Hay fórmulas generales para resolver las ecuaciones polinómicas de grado 1 a 4, sin embargo las fórmulas son complicadas y difíciles de recordar para grado mayor que 2. Por lo tanto buscaremos formas más accesibles para nosotros de resolver las ecuaciones.

2.2.1. Resolviendo una ecuación lineal.

Para resolver una ecuación lineal, se pasa a otra equivalente en las que dejamos los términos que incluyen la variable en un solo lado de la ecuación y pasamos los términos constantes al otro miembro.

En general, si $ax + b = 0$ con $a \neq 0$, según el principio de adición podemos sumar $-b$ a ambos lados y seguidamente multiplicar por $\frac{1}{a}$ o eqivalentemente, dividir entre a, así,

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ (ax + b) + (-b) &= 0 + (-b) \\ ax &= -b \\ \frac{1}{a}(ax) &= -b\frac{1}{a} \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Como ejemplos tenemos:

Ejemplo 2.4

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 3 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.5 *Resolver* $5x - 6 = 3x$.

Se comienza haciendo que los términos que implican a x *se encuentren en un lado y las constantes en el otro.*

$$
\begin{aligned}
5x - 6 &= 3, \\
5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) \qquad (\textit{sumando} - 3x \textit{ a ambos miembros}), \\
2x - 6 &= 0 \qquad (\textit{simplificando}), \\
2x - 6 + 6 &= 0 + 6 \qquad (\textit{sumando 6 a ambos lados}), \\
2x &= 6 \qquad (\textit{simplificando}) \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} \qquad (\textit{dividiendo ambos lados entre 2}), \\
x &= 3.
\end{aligned}
$$

Resulta claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Dado que cada ecuación es equivalente a la que le antecede, se concluye que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3$. *Es decir, el conjunto solución* $\{3\}$.

Ejemplo 2.6 *Resolver* $2(p + 4) = 7p + 2$.

En primer lugar se eliminan los paréntesis.

$$
\begin{aligned}
2(p + 4) &= 7p + 2, \\
2p + 8 &= 7p + 2 \qquad (\textit{propiedad distributiva}), \\
2p &= 7p - 6 \qquad (\textit{se resta } 8 \textit{de ambos lados}), \\
-5p &= -6 \qquad (\textit{se resta } 7p \textit{ de ambos miembros}), \\
p &= \frac{-6}{-5} \qquad (\textit{se dividen ambos lados entre} - 5), \\
p &= \frac{6}{5}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.7 *Resolver* $\dfrac{7x + 3}{2} - \dfrac{9x - 8}{4} = 6$.

En primer lugar, se eliminan las fracciones multiplicando ambos lados por el mínimo común denominador (es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.), que en este caso es 4.

$$\begin{aligned}
4\left(\frac{7x+3}{2}-\frac{9x-8}{4}\right) &= 4(6), \\
4\cdot\frac{7x+3}{2}-4\cdot\frac{9x-8}{4} &= 24 && (\textit{propiedad distributiva}), \\
2(7x+3)-(9x-8) &= 24 && (\textit{se simplifica}), \\
14x+6-9x+8 &= 24 && (\textit{propiedad distributiva}), \\
5x+14 &= 24 && (\textit{se simplifica}), \\
5x &= 10 && (\textit{se resta} 14 \textit{en ambos lados}), \\
x &= 2. && (\textit{se dividen ambos miembros entre 5}).
\end{aligned}$$

A menudo encontramos ecuaciones que a primera vista no parecen ser lineales, pero que pueden reducirse a ecuaciones lineales aplicando propiedades de los números reales estudiadas en el capitulo anterior. Como nos hacen ver los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2.8 *1.*

$$\begin{aligned}
& \frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4} &&= \frac{9}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x-1}{3}\right) \\
\textit{Multiplicamos por} 12 \quad & 12\left(\frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}\right) &&= 12\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x-1}{3}\right)\right) \\
& 4(5x)-3(x-2) &&= 3\cdot 9-6\left(x-\frac{2x-1}{3}\right) \\
& 20x-3x+6 &&= 27-6x+6\frac{2x-1}{3} \\
& 17x+6 &&= 27-6x+2(2x-1) \\
& 17x+6 &&= 27-6x+4x-2 \\
& 17x+6 &&= 25-2x \\
\textit{sumamos a ambos lados } 2x-6 \quad & 17x+6+2x-6 &&= 25-2x+2x-6 \\
& 19x &&= 19 \\
\textit{multiplicamos por } \frac{1}{19} \quad & \frac{19x}{19} &&= \frac{19}{19} \\
& x &&= 1
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
& & \frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4} &= \frac{x+14}{2}-2\\
&\textit{Multiplicamos por} 12 & 12\left[\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}\right] &= 12\left[\frac{x+14}{2}-2\right]\\
& & 4(5x-2)-3(x-8) &= 6(x+14)-24\\
& & 20x-8-3x+24 &= 6x+84-24\\
& & 17x+16 &= 6x+60\\
&\textit{sumamos a ambos lados } -16-6x & 11x &= 44\\
&\textit{multiplicamos a ambos lados por}\frac{1}{11} & \frac{11x}{11} &= \frac{44}{11}\\
& & x &= 4
\end{aligned}
$$

Cada una de las ecuaciones de los Ejemplos tiene una y sólo una solución o raíz. Esto es característico de todas las ecuaciones lineales en una variable.

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes se representan por letras se denominan ecuaciones literales.

Por ejemplo, en la ecuación literal $x + a = 4b$ se considera que a y b son constantes no especificadas. Las fórmulas, como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse ecuaciones literales. Si se desea expresar una letra específica de una fórmula en términos de las otras, a dicha letra se le considera incógnita.

2.3. Ejercicios

1. En los problemas del determinar cuál de los números dados satisface la ecuación dada,

   a) $9x - x^2 = 0$; $x = 0$, $x = 1$
   b) $20 - 9x = -x^2$ $x = 4$, $x = 5$
   c) $y + 2(y-3) = 4$; $x = \dfrac{10}{3}$, $x = 1$
   d) $2x + x^2 - 8 = 0$; $x = 2$, $x = -4$
   e) $x(7+x) - 2(x+1) - 3x = -2$; $x = -2$, $x = -3$
   f) $\dfrac{11}{9}x - \dfrac{7}{3}x^2 + x^3 + \dfrac{1}{9} = 0$; $x = \dfrac{2-\sqrt{5}}{3}$, $x = 1$, $x = -5$.

2. Determinar qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Especificar si las operaciones **garantizan** o no que las operaciones son equivalentes.

   a) $x - 5 = 4x + 10; x = 4x + 15.$
   b) $8x - 4 = 16; x - \dfrac{1}{2} = 2.$
   c) $x = 4; x^2 = 16.$
   d) $\dfrac{1}{2}x^2 + 3 = x - 9; x^2 + 6 = 2x - 18.$
   e) $x^2 - 2x = 0; x - 2 = 0.$
   f) $\dfrac{2}{x-2} + x = x^2; 2 + x(x-2) = x^2(x-2).$
   g) $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 3; x^2 - 1 = 3(x-1).$
   h) $x(x+5)(x+9) = x(x+1); (x+5)(x+9) = x+1.$
   i) $\dfrac{x(x+1)}{x-5} = x(x+9); x+1 = (x+9)(x-5).$
   j) $2x^2 - 9 = x; x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{9}{2}.$

3. resolver las ecuaciones

   a) $5x - 3 = 9$
   b) $0.2x = 5.$
   c) $\sqrt{2}x + 3 = 8.$
   d) $7x + 7 = 2(x+1).$
   e) $6z + 5z - 3 = 41.$
   f) $\dfrac{x}{5} = 2x - 6.$
   g) $\dfrac{5y}{7} - \dfrac{6}{7} = 2 - 4y.$
   h) $5 + \dfrac{4x}{9} = \dfrac{x}{2}.$

i) $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{5}.d$

j) $\frac{2y-3}{4} = \frac{6y+7}{3}$.

k) $\frac{p}{3} + \frac{3}{4}p = \frac{9}{2}(p-1)$.

l) $\frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{6} = x - 2$.

m) $\frac{x}{5} + \frac{2(x-4)}{10} = 7$.

n) $\frac{9}{5}(3-x) = \frac{3}{4}(x-3)$.

ñ) $\frac{2y-7}{3} + \frac{8y-9}{14} = \frac{3y-5}{21}$.

o) $\frac{3}{2}(4x-3) = 2[x-(4x-3)]$.

p) $(3x-1)^2 - (5x-3)^2 = -(4x-2)^2$.

4. Despeje la variable que se indica en cada caso

a) $I = Prt;\ P$

b) $p = 8q - 1;\ q$

c) $p = -3q + 6;\ q$

d) $r = \frac{2ml}{B(n+1)};\ m.$

e) $\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i};\ R.$

f) $2mn = 3k;\ m$

g) $\frac{a+b}{bm-n} = \frac{3k-t}{m};\ n$

h) $\frac{m-3}{2} - m = \frac{3am-1}{8} + \frac{1}{4};\ m$

i) $\frac{1-3nw}{w-1} = \frac{3a-b}{4} + \frac{5}{3};\ w.$

2.4. Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales

Algunas ecuaciones que no son lineales carecen de solución. En este caso, se dice que el conjunto solución es el **conjunto vacío**, el cual se denota mediante $\emptyset$.

Los siguientes ejemplos ilustran que resolver ecuaciones no lineales puede conducir a ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.9 *Resuelva las siguientes ecuaciones.*

1. $\frac{5}{x-4} = \frac{6}{x-3}$.

*A esta ecuación se le denomina **ecuación fraccional** debido a que la incógnita se encuentra en le denominador.*

Para resolverla, primero se le escribe en forma que no tengan fracciones. Multiplicando ambos lados por el mínimo común denominador,$(x-4)(x-3)$, se tiene

$$\begin{aligned}(x-4)(x-3)\frac{5}{x-4} &= (x-4)(x-3)\frac{6}{x-3},\\ 5(x-3) &= 6(x-4) \qquad (\textit{siempre y cuando})\ (x-4)(x-3)\neq 0\\ 5x-15 &= 6x-24,\\ 9 &= x.\end{aligned}$$

En el primer paso, se multiplicó cada uno de los lados por una expresión que implicaba la variable x. Esto significa que no se garantiza que la última ecuación equivale a la ecuación original. Por consiguiente, debe verificarse si el número 9 satisface la ecuación original. Si se sustituye x por 9 en esa ecuación, el lado izquierdo se convierte en

$$\frac{5}{9-4}=\frac{5}{5}=1$$

y el lado derecho es

$$\frac{6}{9-3}=\frac{6}{6}=1.$$

Dado que ambos miembros son iguales, 9 es una raíz.

2. $\dfrac{3x+4}{x+2}-\dfrac{3x-5}{x-4}=\dfrac{12}{x^2-2x-8}.$

Como $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$, el mínimo común denominador. es $(x+2)(x-4)$. Multiplicando ambos lados por $(x+2)(x-4)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
(x-4)(3x+4)-(x+2)(3x-5) &= 12, \textit{ siempre que } (x+2)(x-4)\neq 0\\
3x^2-8x-16-(3x^2+x-10) &= 12,\\
3x^2-8x-16-3x^2-x+10 &= 12,\\
-9x-6 &= 12,\\
-9x &= 18,\\
x &= -2.
\end{aligned}$$

Sin embargo, la ecuación original no está definida para $x=-2$ *(no se puede dividir entre 0), y por ello, no existen raíces. El conjunto solución es* $\emptyset$.

3. $\dfrac{4}{x-5}=0.$

   La única forma en que una fracción puede ser igual a 0 es cuando el numerador es 0. Dado que el numerador, 4, nunca puede ser cero, el conjunto solución es $\emptyset$.

Ejemplo 2.10 *Resolver* $\sqrt{x^2+33}-x=3$.

Para resolverla, se elevan ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación no garantiza equivalencia y, por ello, se deben verificar cualesquiera "solución" resultante.

Se comienza aislando el radical en un lado.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+33} &= x+3,\\
x^2+33 &= (x+3)^2 \qquad (\textit{elevando al cudrado ambos lados}),\\
x^2+33 &= x^2+6x+9,\\
24 &= 6x,\\
4 &= x.
\end{aligned}$$

Se debe estar en posibilidades de probar, mediante sustitución, que 4 es en realidad una raíz.

Ejemplo 2.11 *Resolver* $\sqrt{y-3}-\sqrt{y}=-3$.
Cuando una ecuación tiene dos términos que contienen radicales, en primer lugar se escribe una ecuación de manera que, de ser posible, se encuentre un radical en cada uno

de sus miembros.

$$\begin{aligned}
\sqrt{y-3} &= \sqrt{y}-3, \\
y-3 &= y-6\sqrt{y}+9 \qquad (\textit{elevando al cuadrado ambos lados}), \\
6\sqrt{y} &= 12, \\
\sqrt{y} &= 2, \\
y &= 4 \qquad (\textit{elevando al cuadrado ambos lados}).
\end{aligned}$$

Sustituyendo 4 en el primer miembro de la ecuación original se obtiene $\sqrt{1}-\sqrt{4}$, *que es -1. Puesto que esto no es igual al segundo miembro, -3, no existe solución.*
Es decir, el conjunto solución es $\emptyset$.

Ejercicios. 2.1

1. *En los Problemas siguientes resolver las ecuaciones.*

   a) $\dfrac{5}{x}=25.$
   b) $\dfrac{4}{x-1}=2.$
   c) $\dfrac{3}{7-x}=0.$
   d) $\dfrac{5x-2}{x+1}=0.$
   e) $\dfrac{4}{8-x}=\dfrac{3}{4}.$
   f) $\dfrac{x+3}{x}=\dfrac{2}{5}.$
   g) $\dfrac{q}{3q-4}=3.$
   h) $\dfrac{4p}{7-p}=1.$
   i) $\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{2}{p-2}.$
   j) $\dfrac{2x-3}{4x-4}=6.$
   k) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}.$
   l) $\dfrac{4}{t-3}=\dfrac{3}{t-4}.$
   m) $\dfrac{3x-2}{2x+3}=\dfrac{3x-1}{2x+1}.$
   n) $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{2-x}=0.$
   ñ) $\dfrac{y-6}{y}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{y+6}{y-6}.$
   o) $\dfrac{y-3}{y+3}=\dfrac{y-3}{y+2}.$
   p) $\dfrac{-4}{x-1}=\dfrac{7}{2-x}+\dfrac{3}{x+1}.$
   q) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{4}{1-2x}.$

r) $\dfrac{9}{x-3} = \dfrac{3x}{x-3}$.

s) $\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{3x-4}{x^2-9}$.

t) $\sqrt{x+6} = 3$.

u) $\sqrt{z-2} = 3$.

2. *En los Problemas siguientes resolver las ecuaciones.*

a) $\sqrt{5x-6} - 16 = 0$.

b) $6 - \sqrt{2x+5} = 0$.

c) $\sqrt{\dfrac{x}{2}+1} = \dfrac{2}{3}$.

d) $(x+6)^{1/2} = 7$.

e) $\sqrt{4x-6} = \sqrt{x}$.

f) $\sqrt{7-2x} = \sqrt{x-1}$.

g) $(x-3)^{3/2} = 8$.

h) $\sqrt{y^2-9} = 9-y$.

i) $\sqrt{y} + \sqrt{y+2} = 3$.

j) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1$.

k) $\sqrt{z^2+2z03+z}$.

l) $\sqrt{\frac{1}{w}} - \sqrt{\frac{2}{5w-2}} = 0$.

3. *En cierta reserva ecológica, el número y de presas que un depredador consume en cierto intervalo de tiempo está dado por*

$$y = \frac{10x}{1+0.1x},$$

en donde x es la densidad de presas(número de presas por densidad de área). ¿Qué densidad permitiría a un depredador sobrevivir si necesita consumir 50 presas en el período dado?.

4. *Existen varias reglas para determinar las dosis de medicina para niños cuando se ha especificado la dosis para adultos. Dichas reglas pueden basarse en peso, estatura y otras características. Si A = edad del niño, d = dosis del adulto y c = dosis del niño, entonces se tienen dos especificaciones.*

$$\textit{Regla de Young}: c = \frac{A}{A+12}d.$$

$$\textit{Regla de Cowling}: c = \frac{A+1}{24}d.$$

¿A qué edad las dosis de los niños son iguales según las dos reglas?. Redondee su respuesta al año más cercano.

5. *La policía ha utilizado la fórmula* $s = \sqrt{30fd}$ *para calcular la velocidad* s *(en millas por hora) de un automóvil, si derrapa d pies cuando se detiene.La cantidad* f *es el coeficiente de fricción determinado por la clase de camino (como concreto,asfalto, grava o alquitrán);* f *depende también de si el camino está seco o mojado. En la tabla que aparece enseguida se proporcionan algunos valores del coeficiente* f*. ¿ A 40 millas por hora, más o menos en qué distancia derraparía un automóvil en un camino seco de concreto?. Proporcione la respuesta redondeando el valor en pies.*

	Concreto	*Alquitrán*
Mojado	*0.4*	*0.5*
Seco	*0.8*	*1.0*

2.5. Ecuaciones Cuadráticas

Para aprender a resolver problemas un poco mas complejos, se explicarán ahora métodos para la resolución de ecuaciones cuadráticas .

Definición 2.3 *Una* ***ecuación cuadrática*** *en la variable* x *es una ecuación que puede escribirse de la forma:*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a*,* b *y* c *son constantes y* $a \neq 0$.

Observe que la condición $a \neq 0$ es indispensable, pues en caso contrario estamos en presencia de una ecuación lineal.

Una ecuación cuadrática es una ecuación de segundo grado o ecuación de grado 2. Mientras que las ecuaciones lineales tienen sólo una raíz, algunas ecuaciones cuadráticas pueden tener hasta dos raíces distintas.

Hay diferentes alternativas para resolver la ecuación : completando cuadrados, utilizando la fórmula cuadrática o factorizando.

Solución de una ecuación cuadrática.

Completando Cuadrados.

Ejemplo 2.12 1. *Resolver la ecuación* $2x^2 - x - 6 = 0$*. Para ello seguimos los siguientes pasos:*

Dividimos toda al ecuación entre el coeficiente cuadrático.

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 6 &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(2x^2 - x - 6\right) &= \frac{1}{2}0 \\ x^2 - \frac{1}{2}x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Pasamos los términos constantes al segundo miembro:

$$x^2 - \frac{1}{2}x = 3$$

Completamos cuadrado en el primer miembro: *En este caso sumamos a ambos lados* $\left(\dfrac{-\frac{1}{2}}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 &= 3 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} &= 3 + \frac{1}{16} \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{48+1}{16} \\ \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{49}{16} \end{aligned}$$

Extraemos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} &= \sqrt{\frac{49}{16}} \\ \left|x - \frac{1}{4}\right| &= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} \\ \left|x - \frac{1}{4}\right| &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Esto implica que

$$x - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \qquad o \qquad x - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$$

En cuyo caso, sólo nos resta despejar la variable: La ecuación tiene dos soluciones diferentes:

$$x = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad y \qquad x = -\frac{7}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

En Resumen, para resolver la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ completando cuadrado se siguen los siguientes pasos:

1. Dividimos toda la ecuación por el coeficiente cuadrático, en caso de ser diferentes de 1.

2. Pasamos los términos constantes al segundo miembro.

3. Sumamos a ambos lados de la igualdad k, donde k es la mitad del coeficiente lineal que aparece en el primer miembro.

4. El primer miembro de la ecuación es el cuadrado del binomio $(a+k)^2$, de modo que la solución se obtienen extrayendo la raíz cuadrada en ambos lados y finalmente despejamos la variable.

Utilizando la fórmula Cuadrática.

Esta fórmula es bastante conocida; si $ax^2+bx+c=0$ la(s) soluciones de la ecuación vienen dadas por la ecuación:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula no es mas que la generalización del procedimiento anterior, veamos:

Como la ecuación que tenemos es $ax^2+bx+c=0$ repetimos los mismos pasos anteriores con esta ecuación general:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0\\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0\\
x^2+\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\\
x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-4ac+b^2}{4a^2}\\
\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} &= \sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}\\
\left|x+\frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}\\
\left|x+\frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2|a|}\\
\left|x+\frac{b}{2a}\right||a| &= \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2}
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right).a=\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2}$$

o

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right).a=-\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2}$$

Lo que es equivalente a escribir

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right).a=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a} \\ x &= \frac{b \pm \sqrt{-4ac+b^2}}{2a} \end{aligned}$$

Esto significa que la solución o soluciones de la ecuación (en caso de tenerla) debe(n) satisfacer esta ecuación anterior.

Así por ejemplo, las soluciones de $6x^2 + 7x + 1 = 0$ deben satisfacer la ecuación:

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{12} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12} \\ &= \frac{-7 \pm 5}{12} \end{aligned}$$

Así las soluciones son:

y

$$\frac{-7+5}{12} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6} \qquad \frac{-7-5}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

Observación 2.2 *La ecuación*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

tiene como cantidad sub-radical o radicando la expresión $b^2 - 4ac$, a la cual la llamaremos discriminate.

Ahora bien, al sustituir los valores de a, b, c es el discriminante siempre obtendremos un número real, por lo tanto puede ser: Positivo, cero o negativo.

Si el Discriminante es positivo: *la ecuación tiene dos raíces reales, como se vio en el ejemplo anterior.*

Si el Discriminante es cero: *La ecuación tiene sólo una raíz.*

Si el Discriminante es negativo: *la ecuación no tiene raíces reales; esto es,* ***no existen números reales que satisfagan la ecuación****.*

Ejemplo 2.13 *Veamos si las siguientes ecuaciones poseen solución:*

1. $x^2 - 2x + 1 = 0$. *Es sano calcular el valor del discriminante.*

   $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$*; esto implica que la ecuación tiene sólo una solución. ¿Cual?, sólo completamos*

   $$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 0}{2 \cdot 1} = 2$$

2. $2x^2 - 3x + 7 = 0$.

   Calculamos el discriminante $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47$*, lo cual nos indica que la ecuación no tiene soluciones reales.*

2.6. ¿Qué significa que el discriminante sea negativo?

Como ya hemos comentado antes, si tenemos la ecuación $ax^2+bx+c = 0$, y calculamos el discriminante $b^2 - 4ac$ y es negativo, significa que ningún número real satisface esta ecuación.

Pero podemos ir más allá, ¿Qué otro dato interesante podemos obtener?
Pues uno muy interesante!!

Eso significa que la expresión $ax^2 + bx + c$ nunca se "hace cero", y en consecuencia siempre va a ser positiva o siempre negativa.

¿Cómo averiguarlo?, sencillo, sustituimos x por un número real cualquiera, y el signo del resultado, debe coincidir con el signo de la expresión.

Ejemplo 2.14 *En la expresión* x^2+x+1 *calculamos* $1^2-4\cdot 1\cdot 1 = -3$*, lo cual nos indica que la expresión tiene siempre un mismo signo.*

Si sustituimos $x = 0$ *en la expresión, obtenemos* $0^2 + 0 + 1 = 1$*, lo cual nos indica que la expresión siempre es positiva.*

Y como consecuencia tenemos que podemos resolver una inecuación interesante $x^2 + x + 1 > 0$, la cual tendrá solución todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Y además obtenemos que $x^2 + x + 1 \leq 0$, tiene como conjunto solución $\emptyset$.
¿No te parece interesante ?...

Hallando las Raíces por Factorización.

En otras ocasiones resulta muy útil expresar la ecuación factorizada, ésta es $a(x - x_0)(x - x_1)$ donde x_0 y x_1 son las soluciones de la ecuación y a el coeficiente cuadrático; como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15 *Deseamos hallar las raíces de la ecuación* $x^2 + 7x + 12 = 0$.
Para ello, factorizamos el primer miembro de la ecuación $(x+3)(x+4) = x^2+7x+12 = 0$.
Para que el producto $(x + 3)(x + 4)$ *sea igual a cero, es suficiente que alguno o ambos de los factores sea cero.*
Luego, las raíces son $x = -3$ *y* $x = -4$*. (Puede verificarlo con cualquiera de las formas anteriores para buscar la solución.)*

Ejemplo 2.16 *Consideremos ahora la ecuación* $6x^2 - 5x - 4 = 0$.
En este caso, $6x^2 - 5x - 4 = 6\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
Así las raíces son $x = \frac{4}{3}$ *y* $x = -\frac{1}{2}$.

Pero esta herramienta va mas allá, algunas ecuaciones, no necesariamente, cuadráticas pueden resolverse mediante factorización, como se muestra en el Ejemplo siguiente

Ejemplo 2.17 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1.

$$4x - 4x^3 = 0.$$

A ésta se le denomina ecuación de tercer grado.

$$\begin{aligned} 4x - 4x^3 &= 0, \\ 4x(1-x^2) &= 0, \\ 4x(1-x)(1+x) &= 0. \end{aligned}$$

Para que el producto sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser cero, o todos, (note que $4 \neq 0$) por lo tanto nos queda que $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. En consecuencia, el conjunto solución es:

$$\{-1, 0, 1\}.$$

2. $x(x+2)^2(x+5) + x(x+2)^3 = 0$.
Como el factor $x(x+2)^2$ es común a ambos términos del lado izquierdo, se tiene

$$\begin{aligned} x(x+2)^2[(x+5)+(x+2)] &= 0, \\ x(x+2)^2(2x+7) &= 0. \end{aligned}$$

Por ello, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de donde se concluye que el conjunto solución es $\{-\frac{7}{2}, -2, 0\}$.

Ejemplo 2.18 *Resolver $x^2 = 3$.*
Esta ecuación es equivalente a

$$x^2 - 3 = 0.$$

Factorizando, se obtiene

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0.$$

Por lo tanto, $x - \sqrt{3} = 0$ o bien $x + \sqrt{3} = 0$. Las raíces son $\pm\sqrt{3}$.

Una forma más general de la ecuación $x^2 = 3$ es $u^2 = k$. De la misma manera que antes, se puede demostrar que:

$$\boxed{\text{Si } u^2 = k, \text{ entonces } u = \pm\sqrt{k}.}$$

2.7. Problemas que resolver con Ecuaciones

Podemos tratar de resolver algunos problemas que tenga que ver con nuestro quehacer. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.19 *Un número se multiplica por 3. El resultado se divide por 4 y luego se le resta 5. Este nuevo resultado se multiplica por 10, obteniéndose así la cuarta parte del número aumentada en 37. ¿Cuál es el número?*

Para resolverlo, llamaremos x al número que andamos buscando.

Por pasos:

1. En primer lugar nos dicen que multiplicamos por 3 al números: $3x$
2. El resultado se divide por 4: $\dfrac{3x}{4}$
3. y luego se le resta 5: $\dfrac{3x}{4} - 5$.
4. Este nuevo resultado se multiplica por 10: $10\left(\dfrac{3x}{4} - 5\right)$
5. obteniéndose así la cuarta parte del número aumentada en 37: $10\left(\dfrac{3x}{4} - 5\right) = \dfrac{x}{4} + 37$

Con todas las condiciones que nos indica el problema, nos genera una ecuación, que sólo debemos resolver para saber cual es el valor de x (que es nuestro número buscado).

$$\begin{array}{rrcl}
 & 10\left(\dfrac{3x}{4} - 5\right) & = & \dfrac{x}{4} + 37 \\
\text{usamos propiedad distributiva} & \dfrac{30x}{4} - 50 & = & \dfrac{x}{4} + 37 \\
\text{Multiplicamos por } \ 4 & 30x - 200 & = & x + 148 \\
\text{sumamos a ambo lados } \ -x + 200 & 30x - x & = & 200 + 148 \\
 & 29x & = & 348 \\
\text{dividimos ambos lados por } \ 29 & \dfrac{29x}{29} & = & \dfrac{348}{29} \\
 & x & = & 12.
\end{array}$$

Así, el número buscado es 12.

`Las cuatro fases que habrá que seguir para resolver un problema son:`

1. Comprender el problema; para lo cual es importante leer detenidamente el enunciado.
2. Plantear el problema. Aquí se debe elegir las operaciones y anotar el orden en que deben ser realizadas, así como expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones.
3. Resolver el problema, en este caso hallar la solución de la ecuación.
4. Y finalmente, responder y comprobar la solución.

Ejemplo 2.20 *Hay que repartir Bs 60.000 entre cierto número de amigos, presentes en una reunión, de manera exacta entre ellos. Alguien nota que si hubieran dos amigos menos, a cada uno le tocaría Bs2.500 más. ¿ Cuántos son los amigos presentes y cuánto le toca a cada uno?*

- Denotemos por x el número de amigos presentes.
- Entonces a cada uno le debe tocar $\dfrac{60000}{x}$
- Como el problema nos dices que "si hubieran dos amigos menos, a cada uno le tocaría Bs2.500 más", esto se puede expresar por

$$\frac{60000}{x-2} = 2500 + \frac{60000}{x}$$

- Así que procedemos a resolver la ecuación, teniendo presente que $x \neq 0$ y $x \neq 2$, en cuyo caso,

$$\begin{aligned}
\frac{60000}{x-2} &= 2500 + \frac{60000}{x} \\
x(x-2)\left(\frac{60000}{x-2}\right) &= x(x-2)\left(2500 + \frac{60000}{x}\right) \\
60000x &= 2500(x^2-2x) + 60000(x-2) \\
60000x &= 2500x^2 - 5000x + 60000x - 120000 \\
0 &= 2500(x^2-2x-48) \\
0 &= 2500(x-8)(x+6)
\end{aligned}$$

De aqui tenemos que las posibles soluciones están dadas por $x-8=0$ y $x+6=0$, es decir, si $x=8$ o $x=-6$; ahora bien, x denota el número de personas en la reunión, por lo tanto no puede ser -6, así que la respuesta es "en la reunión hay 8 amigos" y a cada uno le corresponde $\dfrac{60000}{8} = 7500$ bolívares.

Ejercicios. 2.2

En los Problemas resolver resuelva las ecuaciones que se indican.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0.$
2. $t^2 + 3t + 2 = 0.$
3. $y^2 - 7y + 12 = 0.$
4. $x^2 + x - 12 = 0.$
5. $x^2 - 2x - 3 = 0.$
6. $x^2 - 16 = 0.$
7. $x^2 - 12x = -36.$
8. $3w^2 - 12w + 12 = 0.$
9. $x^2 - 4 = 0.$
10. $2x^2 + 4x = 0.$
11. $x^2 + 9x = -14.$
12. $4x^2 + 1 = 4x.$
13. $z^2 - 8z = 0.$
14. $y(2y + 3) = 5.$
15. $8 + 2x - 3x^2 = 0.$
16. $-x^2 + 3x + 10 = 0.$
17. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y.$
18. $2p^2 = 3p.$
19. $-r^2 - r + 12 = 0.$
20. $x(x - 1)(x + 2) = 0.$
21. $(x - 2)^2(x + 1)^2 = 0.$
22. $x^3 - 4x^2 + 5x = 0.$
23. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0.$
24. $x^3 - 64x = 0.$
25. $(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0.$
26. $3(x^2 + 2x - 8)(x - 5) = 0.$
27. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0.$
28. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$
29. $x^2 + 2x - 24 = 0.$
30. $x^2 - 2x - 15 = 0.$
31. $4x^2 - 12x + 9 = 0.$
32. $p^2 + 2p = 0.$
33. $-2x + x^2 = 0.$
34. $4 - 2n + n^2 = 0.$
35. $2x^2 + x = 5.$
36. $6x^2 + 7x - 5 = 0.$
37. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0.$
38. $2x^2 + x = 5.$
39. $6x^2 + 7x - 5 = 0.$
40. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0.$

41. $2x^2 - 3x = 20.$

42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

43. $2x^2 + 4x = 5$

44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0.$

45. $x^2 = \dfrac{x+3}{2}.$

46. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{6}{x} - 1.$

47. $\dfrac{3}{x-4} + \dfrac{x-3}{x} = 2.$

48. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{6}{2x+1} = 5.$

49. $\dfrac{6x+7}{2x+1} - \dfrac{6x+1}{2x} = 1.$

50. $\dfrac{6(w+1)}{2-w} + \dfrac{w}{w-1} = 3.$

51. $\dfrac{2}{r-2} - \dfrac{r+1}{r+4} = 0.$

52. $\dfrac{y+1}{y+3} + \dfrac{y+5}{y-2} = \dfrac{14y+7}{y^2+y-6}.$

53. $\dfrac{2x-3}{2x+5} + \dfrac{2x}{3x+1} = 1.$

54. $\dfrac{3}{t+1} + \dfrac{4}{t} = \dfrac{12}{t+2}.$

55. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{x^2}.$

56. $5 - \frac{3(x+3)}{x^2} + 3x = \frac{1-x}{x}.$

57. $3\sqrt{x+4} = x - 6.$

58. $q + 2 = 2\sqrt{4q-7}.$

59. $\sqrt{x+7} - \sqrt{2x} - 1 = 0.$

60. $\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} + 1 = 0.$

61. $\sqrt{x} - \sqrt{2x-8} - 2 = 0.$

62. $\sqrt{y-2} + 2 = \sqrt{2y+3}.$

63. $\sqrt{\sqrt{x}+2} = \sqrt{2x-4}.$

64. $\sqrt{x+5} + 1 = 2\sqrt{x}.$

Bracamonte Mireya
Ere Jurancy
Mendoza Maln
Monsalve Abelardo
Vivas Miguel

Bibliografía

[1] BALDOR, J. A. *Algebra*. Publicaciones CULTURAL. México. 1999.

[2] LEITHOLD, L., *Matemáticas Previas al Cálculo*, 3a. ed., 1994.

[3] SAENZ, Jorge. *Calculo Diferencial*, con funciones transcendentes tempranas para ciencias e ingeniería. Venezuela. Segunda Edición. 2005

[4] STEWART, James y otros *Precálculo*. International Thomson Editores. México, Boston, Toronto, Washington. Tercera Edición. 2001.